

КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ИЗДАНИЕ

Серия основана в 2010 году



Редакционный совет серии:

Председатель совета
ректор Белорусского
государственного университета
С. В. Абламейко

Члены совета:

*А. В. Данильченко (зам. пред.), Н. Н. Герасимович (отв. секретарь),
М. А. Журавков, С. Н. Ходин, И. С. Ровдо, Д. Л. Иванов,
В. В. Лысак, О. М. Самусевич, О. А. Ивашкевич (зам. пред.),
В. М. Анишик, П. А. Мандрик*

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. Г. Кононов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по математическим специальностям*



МИНСК
БГУ
2014

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73-1
К64

Рецензенты:

кафедра алгебры и геометрии Белорусского государственного
педагогического университета имени Максима Танка
(исполняющий обязанности заведующего кафедрой
доктор педагогических наук, профессор *В. В. Шлыков*);
кандидат физико-математических наук, доцент *М. В. Милованов*;
доктор физико-математических наук, профессор *И. В. Белько*

Уважаемые читатели!

Серия «Классическое университетское издание» была основана в 2010 году к 90-летию Белорусского государственного университета. Путь, который прошло наше учебное заведение в своем развитии, свидетельствует о становлении в нем собственной академической и научной традиции. Несомненно, опыт и знания, аккумулированные в стенах БГУ, являются не только предметом нашей гордости, но и достоянием всего белорусского общества. Одна из целей предлагаемой серии — сделать это достояние как можно более открытым и доступным.

Белорусский государственный университет всегда славился академичностью и фундаментальностью в подготовке специалистов. Однако сегодня этого уже недостаточно. От выпускника требуется умение быстро включаться в непосредственную практическую работу, которой свойствен синтез нескольких форм деятельности: собственно производственной, исследовательской, проектно-разработческой. В выигрыше в конечном итоге окажется тот, кто сегодня научится более эффективно создавать и применять знания, оперативно изменять технологии, совершенствовать и радикально трансформировать накопленный опыт. Вот почему совмещение преимуществ фундаментального и прагматического образования стало основой инновационно ориентированной подготовки будущих специалистов в нашем университете.

Серия отражает многолетний опыт научно-педагогической, методической и издательской работы БГУ. Ее цель — представить модель учебного текста, которая в своей структуре содержит набор программ образовательно-научно-производственной деятельности будущих специалистов. Реализация этой модели позволит обеспечить

универсализм выпускника, его способность к эффективному решению важных задач, стоящих перед Республикой Беларусь на национальном и международном уровне.

Классическое университетское издание, являя собой сплав научной и педагогической мысли, призвано формировать особую культуру знания — передового и доступного, теоретического и практического, общекультурного и специализированного. Словом, такого знания, которое будет работать.

Книги этой серии должны стать образцом научно-методического обеспечения современного образовательного процесса в высшей школе, утвердить ведущую роль нашего университета в качестве национального научно-методического центра Республики Беларусь.

Надеемся, что серия «Классическое университетское издание» состоится и как одно из слагаемых особой культурно-образовательной среды БГУ, которая будет способствовать интеллектуальному росту и творческой созидательной деятельности наших студентов.

*Ректор Белорусского
государственного университета
академик НАН Беларуси, профессор*



С. В. Абламейко

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении аналитической геометрии и алгебры студенты БГУ и других вузов более трех десятков лет используют книгу «Алгебра и аналитическая геометрия» [1, 2], написанную преподавателями БГУ М. В. Миловановым, М. М. Толкачевым, Р. И. Тышкевич и А. С. Феденко. Признавая высокие научные и методические достоинства этого издания, следует сказать, что в последние годы ощущается потребность в отдельном пособии по аналитической геометрии. Упомянутое учебное пособие предназначалось прежде всего для изучения объединенного курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», который читался в свое время студентам-первокурсникам. Впоследствии по ряду причин этот естественный симбиоз в преподавании алгебры и геометрии был разрушен, и сейчас существуют две отдельные дисциплины. Кроме того, с течением времени несколько раз менялись школьные и университетские программы по алгебре и геометрии. Содержание и изложение аналитической геометрии следует адаптировать также для того, чтобы они были доступными для нынешних выпускников общеобразовательных школ, средний уровень математической подготовки которых заметно снизился.

Эти обстоятельства учитывались автором при написании предлагаемого учебного пособия. Его основой послужили лекции по аналитической геометрии, читаемые автором на первом курсе механико-математического факультета БГУ. В соответствии с действующим учебным планом курс алгебры и теории чисел преподается параллельно с аналитической геометрией, и часто возникает ситуация, когда при изложении геометрического раздела необходимый алгебраический материал еще неизвестен студентам. В этом случае, если речь идет о новых математических понятиях (матрицы, определители, квадратичные формы), в книге приводятся необходимые определения, примеры и основные результаты без деталей и сложных доказательств. Если же необходим конкретный факт, то дается ссылка на соответствующую алгебраическую литературу.

В учебном пособии рассматривается маломерная аналитическая геометрия, т. е. геометрия евклидовой плоскости E^2 и евклидова пространства E^3 , приводятся начальные сведения о вещественной проективной плоскости (этот материал обычно преподается в первом семестре), а также многомерная аналитическая геометрия.

Разумеется, на содержание и стиль изложения этого учебного пособия повлияли установленный объем и личные предпочтения автора. Желающие узнать глубже аналитическую геометрию и познакомиться с различными подходами к ее изло-

жению могут обратиться к классическим книгам, написанным известными учеными и педагогами [3–6].

Автор глубоко признателен Т. В. Тихоновой и О. Н. Вярвильской, которые высказали свои замечания по первым главам книги, учтенные в дальнейшей работе, а также М. В. Милованову, который взял на себя труд внимательно прочесть рукопись и сделать содержательные замечания и пожелания, основанные на богатом авторском опыте и многолетней педагогической практике. Весьма полезными и плодотворными были многочисленные обсуждения текста книги с профессором С. М. Агеевым. Его скрупулезный подход к литературной форме и собственно математическому содержанию учебного пособия помог исправить ряд неточностей и упростить некоторые фрагменты изложения.

ВВЕДЕНИЕ

Общепризнано, что среди других наук математика занимает особое положение, которое заключается в строгости ее определений и построений, абсолютной истинности математических утверждений (именно это привлекает к постижению математики многих людей). Строгость математической науки достигается тем, что теоремы той или иной области математики выводятся (доказываются) по определенным логическим законам из некоторых сравнительно простых утверждений, считающихся в этой области истинными, т. е. из *аксиом*. В наибольшей степени это относится к геометрии, изложение которой в «Началах» Евклида (III в. до н.э.) было первым в истории человечества аксиоматическим построением научной теории. Содержание «Начал» до сих пор остается основой школьной элементарной геометрии. Плоскость и пространство, где развивается школьная геометрия, называются *евклидовыми*. В дальнейшем аксиомы Евклида были всесторонне изучены и дополнены. Наиболее известной является аксиоматика Д. Гильберта¹, включающая 20 аксиом.

По многим причинам полное и скрупулезное аксиоматическое изложение евклидовой геометрии в школе невозможно. Такой подход реализуется в высшей математике в рамках дисциплины «Основания геометрии». В аналитической геометрии мы не будем рассматривать систему аксиом Гильберта². Тем не менее, используя в начале нашего курса материал элементарной школьной геометрии, мы можем быть уверены в его возможном строгом обосновании в рамках аксиоматики Гильберта. Кроме гильбертовской существуют и другие системы аксиом евклидовой геометрии. Среди них прежде всего следует упомянуть аксиоматику Г. Вейля³.

Аксиоматическое построение теории предполагает наличие некоторых *первичных* (неопределяемых) *понятий* и *первичных отношений* между ними, свойства которых описываются аксиомами. В аксиоматике Гильберта евклидовой геометрии первичными понятиями являются *точка*, *прямая*, *плоскость*, первичными отношениями – *инцидентность*, *лежать между*, *конгруэнтность*. В аксиоматике Вейля первичными понятиями являются понятия *точка* и *вектор*, первичными отношениями – *операции над векторами и точками*.

¹ Давид Гильберт (1862–1943) – немецкий математик.

² Подробное изложение аксиоматики Гильберта имеется в книгах [7, 8]. Гильбертовская аксиоматика планиметрии обсуждается в книге [10].

³ Герман Вейль (1885–1955) – немецкий математик. Построение элементарной геометрии на основе аксиоматики Вейля проведено, например, в книгах [11, 12].

Аналитическая геометрия изучает геометрические фигуры с помощью алгебры, используя *метод координат*. Впервые этот метод применил французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650). В его честь наиболее часто используемые системы координат называются *декартовыми*. В общем случае введение координат в некотором множестве означает замену элементов этого множества элементами другого, более удобного для исследования, множества. В геометрии метод координат позволяет заменять точки пространства тройками вещественных чисел и формулировать геометрические утверждения с помощью уравнений, неравенств и других формальных выражений. Решая уравнения или исследуя их алгебраическими методами, получают решение геометрической задачи или описывают свойства фигур.

В основе современного изложения метода координат лежит понятие вектора, с чего и начинается лекционный курс. Векторам посвящена первая глава учебного пособия. Во второй главе рассматриваются *фигуры первого порядка* – такие, которые задаются уравнениями первой степени в декартовых координатах. Это прямые на плоскости, а также плоскости и прямые в пространстве. Далее изучаются *фигуры второго порядка*. Они задаются уравнениями второй степени. Важнейшими из них являются *эллипсы, гиперболы и параболы* на плоскости, а также *эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды* в пространстве. В четвертой главе приводятся основные понятия и факты о *вещественной проективной плоскости*, относящейся к неевклидовой геометрии. В пятой главе достаточно подробно изучаются *аффинные преобразования и движения евклидовой плоскости и пространства*, широко применяемые в настоящее время в компьютерной геометрии. Шестая и седьмая главы посвящены *многомерной аналитической геометрии*, аффинной и евклидовой соответственно. Содержание этих глав ограничивается учебной программой по аналитической геометрии. Более глубокое изложение аффинной геометрии можно найти в книге [13]. Студенту, обладающему знаниями в объеме элементарной и аналитической геометрии и желающему иметь представление о классических понятиях и результатах, которые могут быть получены на этой основе, можно рекомендовать двухтомную «Геометрию» М. Берже [14], замечательную по богатству собранного в ней материала и лаконичности изложения.

§ 1.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

Вектор – одно из важнейших математических понятий. Помимо геометрии векторы используются в других разделах математики. Кроме того, многие физические величины, например скорость, ускорение, сила, интерпретируются как векторы. В данной главе рассматриваются векторы в элементарной евклидовой геометрии, определяемые направленными отрезками прямых. В общем случае вектор – это элемент того или иного *векторного пространства*, и его природа может быть разнообразной: в роли векторов могут выступать числа (наборы чисел), функции, многочлены, *матрицы* и т. д.

Вначале условимся о некоторых обозначениях. Точки будем обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, \dots . Множество всех точек пространства (или просто пространство) обозначим символом E^3 , произвольную прямую в пространстве – Δ , произвольную плоскость – π . Если рассмотрение ограничивается только некоторой фиксированной плоскостью и нас не интересует ее расположение в пространстве, то данную плоскость будем обозначать символом E^2 . В аналогичной ситуации для прямой будем использовать обозначение E^1 . **Фигурой** будем называть произвольное множество точек (в том числе и пустое).

Будем также считать, что фиксирована единица измерения, т. е. отрезок, длина которого равна единице.

Определение 1.1.1. *Направленным отрезком* называется отрезок прямой, для которого одна из его граничных точек выбрана в качестве начала, а другая – в качестве конца.

Направленный отрезок будем обозначать символом AB : здесь A – начало отрезка, B – конец. Направленный отрезок изображается в виде прямолинейной стрелки, направленной от начала к концу (рис. 1.1.1).



Рис. 1.1.1

Когда $A = B$ не исключается, направленный отрезок AA называется **нулевым**. Направленный отрезок BA называется **противоположным** для направленного отрезка AB . Далее нас будут интересовать только направленные отрезки, поэтому иногда для краткости *направленный отрезок* будем называть просто *отрезком*. Длину произвольного отрезка AB будем обозначать $|AB|$.

Если есть два ненулевых направленных отрезка, которые лежат на параллельных прямых или на одной прямой, то выполняется одно из двух условий: либо они **одинаково направлены**, либо **противоположно направлены**. Отрезки AB и CD на рис. 1.1.2 одинаково направлены ($AB \uparrow\uparrow CD$), отрезки AB и EF противоположно направлены ($AB \uparrow\downarrow EF$). Обычно направленные отрезки задаются таким образом, что мы можем отличить первую ситуацию от второй. Формальное определение здесь следующее.

Пусть AB и CD – ненулевые направленные отрезки, лежащие на параллельных прямых, π – плоскость, содержащая эти отрезки. Направленные отрезки AB и CD называются **одинаково направленными** ($AB \uparrow\uparrow CD$), если они лежат в одной из двух полуплоскостей, на которые прямая Δ , проходящая через точки A (начало одного отрезка) и C (начало другого отрезка), разбивает плоскость π (рис. 1.1.3).

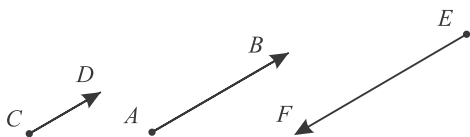


Рис. 1.1.2

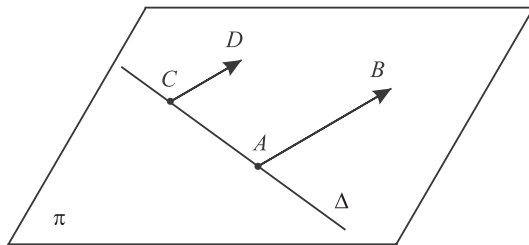


Рис. 1.1.3

Пусть AB и CD – ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой, l_1 – луч с вершиной в точке A , проходящий через точку B , l_2 – луч с вершиной в точке C , проходящий через точку D . Направленные отрезки AB и CD называются **одинаково направленными** ($AB \uparrow\uparrow CD$), если один из двух лучей содержит другой (на рис. 1.1.4 луч l_1 содержит луч l_2).



Рис. 1.1.4

Ненулевые направленные отрезки AB и CD , которые лежат на параллельных прямых или на одной прямой и не являются одинаково направленными, называются **противоположно направленными** ($AB \uparrow\downarrow CD$). Ненулевые отрезки, лежащие на непараллельных прямых, не являются одинаково или противоположно направленными.

Определение 1.1.2. Направленный отрезок AB называется **эквивалентным** направленному отрезку CD (обозначение $AB \sim CD$), если длина отрезка AB равна длине отрезка CD ($|AB| = |CD|$) и отрезки AB и CD одинаково направлены ($AB \uparrow\uparrow CD$). Все нулевые отрезки эквивалентны между собой ($\forall A, B \in \mathbf{E}^3 \ AA \sim BB$) и никакой нулевой отрезок не эквивалентен никакому ненулевому.

Утверждение 1.1.1. Направленный отрезок AB эквивалентен направленному отрезку CD тогда и только тогда, когда середина отрезка AD совпадает с серединой отрезка BC .

Доказательство. Необходимость. Пусть вначале хотя бы один из отрезков, AB или CD , нулевой, например, $A = B$. Тогда условие $AB \sim CD$ означает, что $C = D$, следовательно, отрезки AD и BC совпадают, а значит, совпадают и их середины (рис. 1.1.5).

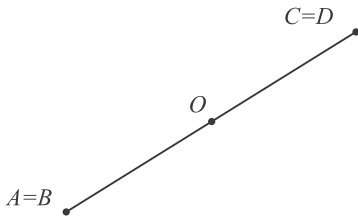


Рис. 1.1.5

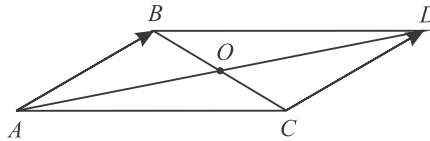


Рис. 1.1.6

Пусть теперь оба отрезка AB и CD ненулевые и не лежат на одной прямой. Тогда четырехугольник $ABDC$ – параллелограмм, AD и BC – его диагонали, которые, как известно, пересекаются и в точке пересечения делятся пополам (рис. 1.1.6).

Пусть, наконец, отрезки AB и CD ненулевые и лежат на одной прямой Δ . Тогда в зависимости от взаимного расположения точек A, B, C, D на прямой возможны 3 различных случая. Если отрезки AB и CD не пересекаются, то множество $\Delta \setminus (AB \cup CD)$ является объединением двух лучей и открытого интервала, расположенного между отрезками AB и CD . В этом случае точка O совпадает с серединой упомянутого интервала (рис. 1.1.7, а). Если отрезки AB и CD пересекаются в одной точке, то эта точка совпадает с точкой O (рис. 1.1.7, б). Если пересечение отрезков AB и CD содержит более одной точки, то это пересечение есть отрезок, середина которого совпадает с точкой O (рис. 1.1.7, в).

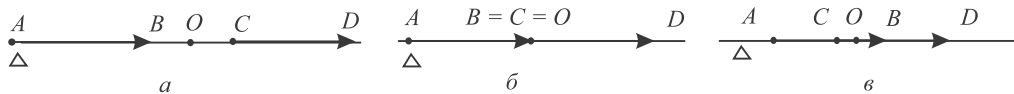


Рис. 1.1.7

Достаточность. Если отрезки AB и CD не лежат на одной прямой, то четырехугольник $ABDC$ – параллелограмм, поскольку его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, $AB \sim CD$. Если же отрезки AB и CD лежат на одной прямой, то, как и в случае необходимости, следует рассмотреть 3 различных варианта взаимного расположения точек A, B, C, D . В каждом из них эквивалентность направленных отрезков AB и CD легко устанавливается. ►

Следствие 1.1.1. Для любых точек $A, B, C, D \in E^3$ равносильны следующие условия:

$$AB \sim CD \Leftrightarrow BA \sim DC \Leftrightarrow AC \sim BD \Leftrightarrow CA \sim DB.$$

Доказательство. Действительно, в силу утверждения 1.1.1 эквивалентность каждой из четырех пар направленных отрезков равносильна одному условию: середины отрезков AD и BC совпадают. ►

Из определения 1.1.2 вытекают следующие свойства отношения эквивалентности направленных отрезков:

(i) для любого направленного отрезка AB верно: $AB \sim AB$ – свойство *рефлексивности*;

- (ii) если $AB \sim CD$, то $CD \sim AB$ – свойство *симметричности*;
 (iii) если $AB \sim CD$ и $CD \sim EF$, то $AB \sim EF$ – свойство *транзитивности*.

Свойства (i)–(iii) означают, что отношение эквивалентности направленных отрезков является отношением эквивалентности в смысле теории множеств (см. [9], § 9) в множестве всех направленных отрезков пространства. Тем самым множество всех направленных отрезков пространства E^3 разбивается на классы эквивалентности.

Определение 1.1.3. Вектором называется класс эквивалентных направленных отрезков.

Векторы будем обозначать строчными латинскими буквами со стрелкой наверху: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Таким образом, каждый вектор \vec{a} представляет собой бесконечное множество направленных отрезков, эквивалентных между собой: $\vec{a} = \{AB, CD, EF, \dots \mid AB \sim CD \sim EF \sim \dots\}$. Каждый направленный отрезок, составляющий данный вектор, называется *представителем* этого вектора. Если AB – представитель вектора \vec{a} , то для вектора \vec{a} используют также обозначение \overrightarrow{AB} . Изобразить вектор, т. е. все направленные отрезки, составляющие данный вектор, невозможно. Обычно для изображения вектора рисуют его представителя и ставят обозначение вектора (рис. 1.1.8).

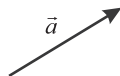


Рис. 1.1.8

По определению все нулевые отрезки образуют один класс эквивалентности, т. е. один вектор. Этот вектор называется **нулевым** и обозначается $\vec{0}$. Множество всех векторов пространства обозначим $V(E^3)$.

Пусть \vec{a} – ненулевой вектор, O – произвольная точка. Из аксиом элементарной геометрии следует, что существует единственный направленный отрезок OA , являющийся представителем вектора \vec{a} . Операция построения по точке O и вектору \vec{a} точки A такой, что направленный отрезок OA представляет вектор \vec{a} , т. е. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, называется **откладыванием вектора от точки**. Понятно, что нулевой вектор от точки O также откладывается однозначно, при этом получается точка O . Таким образом, откладывание вектора от точки – это отображение, которое каждой паре (O, \vec{a}) , состоящей из точки и вектора, ставит в соответствие точку A :

$$\Psi: E^3 \times V(E^3) \rightarrow E^3, (O, \vec{a}) \mapsto A, \overrightarrow{OA} = \vec{a}.$$

Пусть \vec{a}, \vec{b} – ненулевые векторы. Отложив их от некоторой точки O , т. е. построив точки A и B такие, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, можно говорить о числе φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$, выражающем (в радианах) величину угла AOB (рис. 1.1.9). Отметим, что число φ не зависит от выбора точки O . Действительно, если отложить векторы \vec{a}, \vec{b} от другой точки O' ($\vec{a} = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{O'B'}$), то углы AOB и $A'O'B'$ имеют попарно параллельные и одинаково направленные стороны, поэтому их величины равны. Число φ называется **величиной угла** между векторами \vec{a} и \vec{b} . Ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} называются **ортогональными** (или **перпендикулярными**), если величина угла между ними равна $\frac{\pi}{2}$ (обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$). Нулевой вектор считается ортогональным любому вектору.

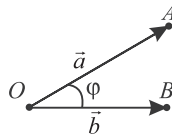


Рис. 1.1.9

Имея дело с векторами, часто используют термин *система векторов*. В отличие от понятия *множества векторов*, которое означает набор попарно различных векторов, под **системой векторов** понимается произвольный набор векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$, конечный либо бесконечный, в котором некоторые векторы могут повторяться.

Определение 1.1.4. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ – некоторая система векторов. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ называются **коллинеарными (компланарными)**, если при откладывании их от некоторой точки O получающиеся точки A, B, C, \dots лежат на одной прямой Δ , проходящей через точку O (рис. 1.1.10) (в одной плоскости π , проходящей через точку O). В случае коллинеарности или компланарности говорят также, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ **параллельны** прямой Δ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots \parallel \Delta$) или плоскости π ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots \parallel \pi$).

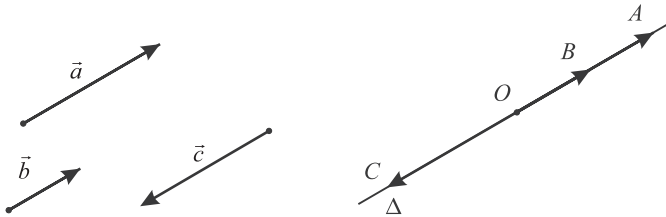


Рис. 1.1.10

Для того чтобы последнее определение было корректным, нужно, как и при определении величины угла между векторами, убедиться, что оно не зависит от выбора точки O . Простые рассуждения, доказывающие этот факт, предлагается провести читателю в качестве упражнения.

Точно так же, как в случае пространства, можно определить понятие вектора плоскости \mathbf{E}^2 (или прямой \mathbf{E}^1) как класса эквивалентных направленных отрезков этой плоскости (прямой). Множество всех векторов плоскости обозначим $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$, множество всех векторов прямой – $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$.

Пусть теперь π – плоскость, рассматриваемая как подмножество пространства ($\pi \subset \mathbf{E}^3$). Формально множество векторов плоскости $\mathbf{V}(\pi)$ не является подмножеством множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ всех векторов пространства, поскольку никакой вектор плоскости не является вектором пространства. Действительно, пусть A, B – точки плоскости π . Вектор $\vec{a} = \overline{AB} \in \mathbf{V}(\pi)$ есть множество всех направленных отрезков плоскости π , эквивалентных направленному отрезку AB :

$$\vec{a} = \{AB, CD, \dots \mid A, B, C, D, \dots \in \pi; AB \sim CD \sim \dots\},$$

в то время как вектор $\vec{a}' = \overline{AB} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ пространства есть множество всех эквивалентных направленных отрезков *пространства*, эквивалентных отрезку AB :

$$\vec{a}' = \{AB, CD, EF, \dots \mid A, B, C, D, E, F, \dots \in \mathbf{E}^3; AB \sim CD \sim EF \dots\}.$$

Бесспорно, что множество \vec{a} (класс направленных отрезков) является собственным подмножеством множества \vec{a}' , т. е. \vec{a} не совпадает с \vec{a}' . Тем не менее множество $\mathbf{V}(\pi)$ можно естественным образом *вложить* в множество $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$, поставив в соответствие каждому вектору $\vec{a} = \overline{AB} \in \mathbf{V}(\pi)$ вектор $\vec{a}' = \overline{AB} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$. Отображение вложения

$$\mathbf{V}(\pi) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^3), \vec{a} \mapsto \vec{a}' \quad (1.1.1)$$

заключается в расширении множества \vec{a} до множества \vec{a}' путем добавления к \vec{a} недостающих направленных отрезков пространства, эквивалентных отрезку AB . Очевидно, что отображение (1.1.1) инъективно, т. е. действительно является вложением. Примем следующее соглашение.

Для любой плоскости $\pi \subset \mathbf{E}^3$ будем отождествлять вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}(\pi)$ с его образом $\vec{a}' \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ при вложении (1.1.1) и считать, что $\mathbf{V}(\pi) \subset \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$.

Если Δ – некоторая прямая, π – плоскость и $\Delta \subset \pi \subset \mathbf{E}^3$, то рассуждения, аналогичные вышеприведенным, позволяют считать, что $\mathbf{V}(\Delta) \subset \mathbf{V}(\pi) \subset \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$. С учетом принятого соглашения можно сказать, что векторы некоторой системы коллинеарны, если это векторы одной прямой, и компланарны, если это векторы одной плоскости.

Упражнение 1.1.1. Пусть Δ и Δ_1 – прямые, π и π_1 – плоскости в пространстве \mathbf{E}^3 . Найдите пересечения $\mathbf{V}(\Delta) \cap \mathbf{V}(\Delta_1)$, $\mathbf{V}(\pi) \cap \mathbf{V}(\pi_1)$, $\mathbf{V}(\Delta) \cap \mathbf{V}(\pi)$.

§ 1.2. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ НА ЧИСЛА

В множестве $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ векторов пространства определим операции сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа.

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$. Отложим вектор \vec{a} от некоторой точки O , т. е. построим точку A такую, что $\overline{OA} = \vec{a}$, затем от точки A отложим вектор \vec{b} , т. е. построим точку B такую, что $\overline{AB} = \vec{b}$. Рассмотрим вектор \overline{OB} (рис. 1.2.1).

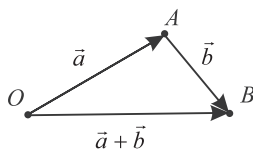


Рис. 1.2.1

Покажем, что полученный вектор будет одним и тем же независимо от выбора точки O . Другими словами, пусть O' – точка, отличная от точки O . Повторим операции последовательного откладывания этих же векторов, но от точки O' . Получим точки A' и B' , такие, что $\overline{O'A'} = \vec{a}$, $\overline{A'B'} = \vec{b}$. Убедимся, что $\overline{OB} = \overline{O'B'}$.

Утверждение 1.2.1. Пусть $O, O' \in \mathbf{E}^3$, $\overline{OA} = \overline{O'A'} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \vec{b}$. Тогда $\overline{OB} = \overline{O'B'}$.

Доказательство. По условию $OA \sim O'A'$, поэтому по следствию 1.1.1 имеем $OO' \sim AA'$. Аналогично из условия $AB \sim A'B'$ получаем, что $AA' \sim BB'$. Следовательно, $OO' \sim BB'$. Еще раз применяя следствие 1.1.1, получаем $OB \sim O'B'$, что и означает искомое равенство $\overline{OB} = \overline{O'B'}$. ►

Доказанное утверждение делает корректным следующее определение.

Определение 1.2.1. Суммой вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и вектора $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB'}$.

Таким образом, для любых точек $O, A, B \in \mathbf{E}^3$ верно равенство

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}, \quad (1.2.1)$$

которое называется **равенством треугольника**.

Упражнение 1.2.1. Докажите, что сумма двух неколлинеарных векторов $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ может быть вычислена по следующему **правилу параллелограмма**: сумма векторов-сторон параллелограмма, выходящих из одной вершины, равна вектору-диагонали, выходящему из этой же вершины: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 1.2.2).

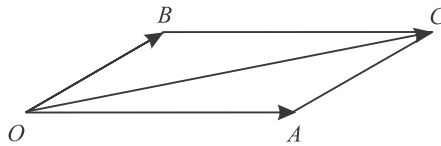


Рис. 1.2.2

Отметим следующие основные свойства сложения векторов, справедливые для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$.

Теорема 1.2.1. (i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (**коммутативность** сложения векторов);

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (**ассоциативность** сложения векторов);

(iii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0}$ (нулевой вектор $\vec{0}$ является **нейтральным элементом** относительно сложения);

(iv) для любого вектора $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ существует **противоположный** вектор $(-\vec{a}) \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$, т. е. такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Все утверждения теоремы легко следуют из определения суммы векторов. Докажем, например, пункт (iv). Действительно, для любого вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ противоположным вектором является вектор \overrightarrow{BA} , так как согласно равенству треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Замечание 1.2.1. С алгебраической точки зрения теорема 1.2.1 означает, что множество всех векторов пространства $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ относительно операции сложения является абелевой группой (см. [1, гл. 7]).

Используя понятие противоположного вектора, определим естественным образом операцию **вычитания (разности)** в множестве векторов.

Определение 1.2.2. Если \vec{a} и \vec{b} – произвольные векторы, то **разностью** вектора \vec{a} и вектора \vec{b} называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Разность вектора \vec{a} и вектора \vec{b} обозначается $\vec{a} - \vec{b}$. Из равенства треугольника (1.2.1) следует, что для любых точек $O, A, B \in \mathbf{E}^3$ верно равенство

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}. \quad (1.2.2)$$

Упражнение 1.2.2. Докажите пункты (i) – (iii) теоремы 1.2.1.

Имея более чем два вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$, их можно последовательно сложить по порядку, определяемому следующей расстановкой скобок:

$(\dots((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \dots + \vec{a}_n)$. При этом будем использовать правило треугольника, т. е. отложим вначале вектор \vec{a}_1 от точки O , получив точку A_1 такую, что $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, затем отложим вектор \vec{a}_2 от точки A_1 , получив точку A_2 такую, что $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2$, и т. д. (рис. 1.2.3).

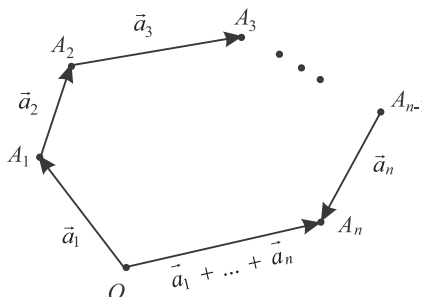


Рис. 1.2.3

В итоге получим ломаную $OA_1A_2A_3\dots A_n$. Сумма $(\dots((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \dots + \vec{a}_n)$ будет равна вектору $\overrightarrow{OA_n}$. Такой способ построения суммы нескольких векторов называется **правилом замыкающей** (отрезок A_nO замыкает ломаную $OA_1A_2A_3\dots A_n$). Сумму этих же векторов можно вычислить, расставляя скобки по-другому, т. е. выполняя $n-1$ раз операцию сложения в другом порядке. Свойство ассоциативности сложения векторов позволяет утверждать, что результат сложения всякий раз будет один и тот же. Поэтому можно не уточнять порядок выполнения сложения и обозначить вектор-сумму $\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n$.

Упражнение 1.2.3. Докажите, что сумму трех некопланарных векторов можно вычислить по **правилу параллелепипеда**: сумма векторов-ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда, равна вектору-диагонали, выходящему из этой же вершины: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ (рис.1.2.4).

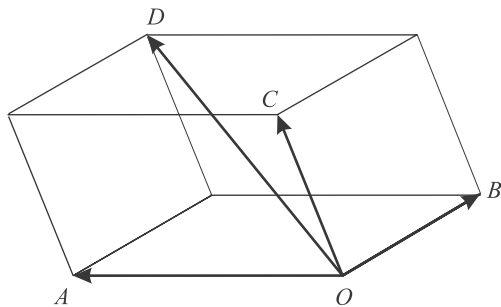


Рис. 1.2.4

Если оставаться в рамках данной плоскости E^2 , то операция откладывания векторов плоскости от точек этой плоскости не выводит нас из плоскости. Следовательно, сумма двух векторов плоскости E^2 дает вновь вектор плоскости E^2 . Это означает, что *определение 1.2.1 задает операцию сложения и в множестве $V(E^2)$ векторов плоскости E^2* . Легко видеть, что утверждения теоремы 1.2.1 остаются справедливыми при замене $V(E^3)$ на $V(E^2)$, т. е. *множество $V(E^2)$ также является абелевой группой относительно операции сложения*.

Все сказанное в предыдущем абзаце очевидно справедливо и для прямой, следовательно, *определение 1.2.1 задает операцию сложения в множестве $V(E^1)$ векторов прямой E^1 и множество $V(E^1)$ является абелевой группой относительно операции сложения.*

Если Δ – прямая, π – плоскость в пространстве E^3 , то, учитывая принятое выше соглашение о $V(\Delta) \subset V(E^3)$ и $V(\pi) \subset V(E^3)$, можно утверждать, что $V(\Delta)$ и $V(\pi)$ – подгруппы группы $V(E^3)$ (см. [1, гл. 7]).

Теперь перейдем к операции умножения векторов на числа.

Определение 1.2.3. Пусть \vec{a} – произвольный вектор, λ – произвольное вещественное число. **Произведением вектора \vec{a} на число λ** называется вектор, который обозначается $\lambda\vec{a}$ и определяется следующими условиями:

- (i) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$;
- (ii) $\begin{cases} \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, & \text{если } \lambda > 0, \\ \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$

Из условия (i) следует, что вектор $\lambda\vec{a}$ нулевой тогда и только тогда, когда вектор \vec{a} нулевой или число λ равно нулю. Отметим также, что для любого числа λ векторы \vec{a} и $\lambda\vec{a}$ коллинеарны.

Если вектор \vec{a} является вектором некоторой плоскости π или некоторой прямой Δ , то умножение на число не выводит вектор из соответствующего множества. Другими словами,

$$\forall \vec{a} \in V(\pi) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \lambda\vec{a} \in V(\pi) \text{ и}$$

$$\forall \vec{a} \in V(\Delta) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \lambda\vec{a} \in V(\Delta).$$

Операция умножения вектора на число обладает следующими основными свойствами.

Теорема 1.2.2. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V(E^3)$ и для любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ верны равенства:

- (i) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
- (ii) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- (iii) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;
- (iv) $1\vec{a} = \vec{a}$.

Доказательство. Равенство (iv) очевидно следует из определения 1.2.2.

Равенство (iii) вытекает из того, что векторы в правой и левой частях имеют одну и ту же длину $|\lambda| |\mu| |\vec{a}|$ и одинаково направлены (их направление совпадает с направлением вектора \vec{a} , если числа λ и μ одного знака, и противоположно направлению вектора \vec{a} , если числа λ и μ разных знаков).

Равенство (ii) доказывается аналогично (iii) путем сравнения длин и направлений векторов в левой и правой частях. Рассуждение предлагается провести самостоятельно.

Равенство (i) докажем в общем случае, т. е. когда векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны и число λ не равно нулю. Отложим векторы \vec{a} и \vec{b} от некоторой точки O . Получим соответственно точки A и B такие, что OAB – треугольник. Отложим также векторы $\lambda\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}$ от точки O . Получим соответственно точки A_1 и B_1 такие, что OA_1B_1 – треугольник (см. рис. 1.2.5 для $\lambda > 1$).

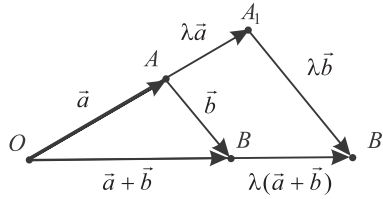


Рис. 1.2.5

Очевидно, что треугольник OA_1B_1 подобен треугольнику OAB и коэффициент подобия равен $|\lambda|$. Записывая равенство отношений длин соответствующих сторон и учитывая знак числа λ , получим

$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \lambda \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Учитывая равенство (1.2.2), последнее соотношение можно переписать в виде

$$\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \lambda \overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \quad \text{или} \quad \lambda(\vec{b} - \vec{a}) = \lambda\vec{b} - \lambda\vec{a}.$$

Таким образом, для любых неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} и любого ненулевого числа λ верно равенство $\lambda(\vec{b} - \vec{a}) = \lambda\vec{b} - \lambda\vec{a}$. Заменяя в нем вектор \vec{a} на $(-\vec{a})$, получим: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, что и требовалось доказать. В случаях, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, или $\lambda = 0$, доказательство предлагается в качестве упражнения. ►

Замечание 1.2.2. Тот факт, что операции сложения и умножения векторов на вещественные числа удовлетворяют утверждениям теорем 1.2.1 и 1.2.2, на языке алгебры означает, что $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ является *вещественным векторным (линейным) пространством* (см. [2, гл. 17]).

§ 1.3. ПРОЕКЦИИ

Пусть \mathbf{E}^2 – плоскость, Δ и Δ' – непараллельные прямые на плоскости. Если A – произвольная точка плоскости, то прямая Δ'' , проходящая через точку A параллельно Δ' , пересекает прямую Δ в точке A' (рис. 1.3.1).

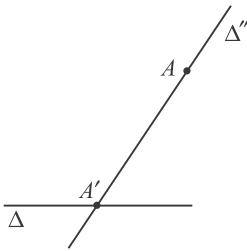


Рис. 1.3.1

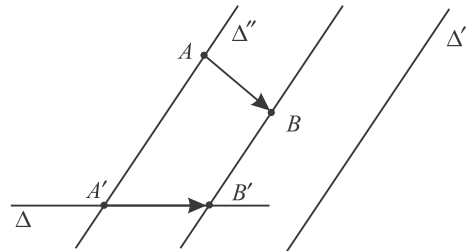


Рис. 1.3.2

Определение 1.3.1. Точка A' называется **проекцией точки A на прямую Δ параллельно прямой Δ'** .

Обычно из контекста ясно, параллельно какой прямой производится проектирование, поэтому проекцию точки A будем обозначать следующим образом: $A' = \text{pr}_\Delta A$. Проекция называется **ортогональной**, если прямые Δ и Δ' ортого-

нальны. В этом случае A' – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую Δ .

Определение 1.3.2. Проекцией фигуры $\Phi \subset \mathbb{E}^2$ на прямую Δ (параллельно Δ') называется фигура, состоящая из проекций всех точек фигуры Φ , т. е.

$$\Phi' = \text{pr}_\Delta \Phi = \{\text{pr}_\Delta A \mid A \in \Phi\}.$$

Проекцией направленного отрезка AB на прямую Δ называется направленный отрезок $A'B' = \text{pr}_\Delta AB$, где $A' = \text{pr}_\Delta A$, $B' = \text{pr}_\Delta B$ (рис. 1.3.2).

Далее в параграфе будем использовать введенные выше обозначения.

Утверждение 1.3.1. Проекции эквивалентных направленных отрезков эквивалентны.

Доказательство. Пусть AB и CD – эквивалентные направленные отрезки плоскости \mathbb{E}^2 , $A'B' = \text{pr}_\Delta AB$, $C'D' = \text{pr}_\Delta CD$. Требуется доказать, что $A'B' \sim C'D'$.

Проведем доказательство в общем случае, т. е. когда AB и CD не параллельны прямой Δ и Δ' . Отложив векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} соответственно от точек A' и C' , получим точки E и F такие, что $AB \sim A'E$ и $CD \sim C'F$ (рис. 1.3.3), причем

$$\text{pr}_\Delta AB = \text{pr}_\Delta A'E = A'B' \quad \text{и} \quad \text{pr}_\Delta CD = \text{pr}_\Delta C'F = C'D'.$$

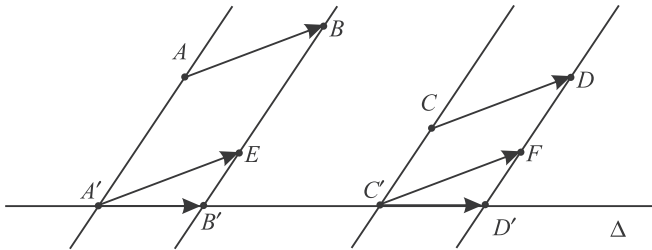


Рис. 1.3.3

Возникают два треугольника: $A'B'E$ и $C'D'F$. Они равны, так как $|A'E| = |C'F|$, $\angle A' = \angle C'$, $\angle E = \angle F$ (углы с попарно параллельными сторонами). Следовательно, $|A'B'| = |C'D'|$. Нетрудно заметить также, что отрезки $A'B'$ и $C'D'$ на прямой Δ одинаково направлены. Таким образом, $A'B' \sim C'D'$. Случаи, когда AB и CD параллельны прямой Δ или Δ' , более простые, предлагается разобрать их самостоятельно. ►

Теперь можно ввести понятие проекции вектора на прямую.

Определение 1.3.3. Проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^2)$ на прямую Δ параллельно прямой Δ' называется вектор $\text{pr}_\Delta \vec{a} = \overrightarrow{A'B'} \in \mathbf{V}(\Delta)$. Здесь $A' = \text{pr}_\Delta A$, $B' = \text{pr}_\Delta B$.

Утверждение 1.3.1 обеспечивает корректность этого определения, т. е. независимость от выбора представителя AB вектора \vec{a} .

Следующее утверждение показывает, что операция проектирования «хорошо» связана с операциями над векторами.

Утверждение 1.3.2. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^2)$ и любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ верны равенства:

- (i) $\text{pr}_\Delta (\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_\Delta (\vec{a}) + \text{pr}_\Delta (\vec{b})$;
- (ii) $\text{pr}_\Delta (\lambda \vec{a}) = \lambda \text{pr}_\Delta (\vec{a})$.

Доказательство. (i) Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Для проекций O', A', B' соответственно точек O, A, B верно равенство треугольника $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{A'B'}$, т. е., согласно определению 1.3.3, равенство (i).

(ii) Проведем доказательство в общем случае, т. е. когда вектор \vec{a} не параллелен ни одной из прямых Δ и Δ' и $\lambda \neq 0$. Отложим последовательно от точки $O \in \Delta$ векторы \vec{a} и $\lambda\vec{a}$. Получим соответственно точки A и B , лежащие на одной прямой, проходящей через точку O (рис. 1.3.4).

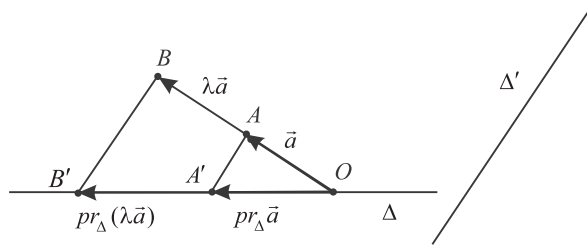


Рис. 1.3.4

Спроектируем точки A и B на прямую Δ . Получим точки A' и B' такие, что $\overrightarrow{OA'} = \text{pr}_\Delta \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB'} = \text{pr}_\Delta (\lambda\vec{a})$. Очевидно, треугольники OAA' и $OB'B'$ подобны с коэффициентом подобия $|\lambda|$. Следовательно, $\text{pr}_\Delta (\lambda\vec{a}) = \lambda \text{pr}_\Delta (\vec{a})$. Доказательства в оставшихся частных случаях предлагается провести самостоятельно. ►

Замечание 1.3.1. С точки зрения алгебры утверждение 1.3.2 означает, что проектирование является *линейным оператором* (см. [2, гл. 19]).

Аналогично рассмотренному параллельному проектированию на прямую можно определить еще два типа проектирования.

Пусть Δ – прямая в пространстве и π – плоскость, не параллельная Δ . **Проекцией точки** $A \in \mathbb{E}^3$ *на прямую Δ параллельно плоскости π* называется точка A' пересечения прямой Δ и плоскости π' , проходящей через A параллельно π (рис. 1.3.5).

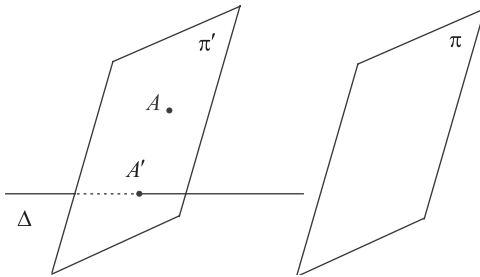


Рис. 1.3.5

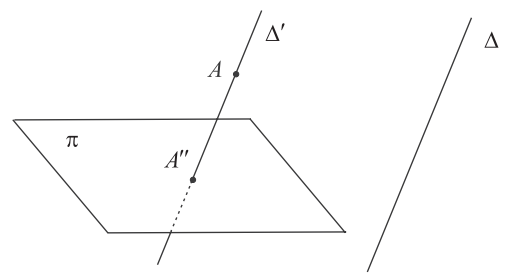


Рис. 1.3.6

Проекцией точки $A \in \mathbb{E}^3$ *на плоскость π параллельно прямой Δ* называется точка A'' пересечения плоскости π и прямой Δ' , проходящей через A параллельно Δ (рис. 1.3.6). Эти два типа проектирования обладают точно такими же свойствами, как и рассмотренное выше проектирование первого типа. Здесь также можно ввести понятия проекции вектора на прямую параллельно плоскости и на плоскость параллельно прямой. Эти проектирования векторов также являются линейными операторами, т. е. справедливы аналоги утверждения 1.3.2.

§ 1.4. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ

В этом параграфе будут приведены начальные сведения о матрицах и определителях порядка два и три, необходимые для дальнейшего изложения аналитической геометрии. Подробное изложение этого раздела в параллельном курсе алгебры требует немалого времени, и обычно студенты еще не знакомы с матрицами и определителями к тому моменту, когда они нужны в геометрии. Детали и доказательства, относящиеся к матрицам и определителям, можно найти, например, в учебном пособии [1].

Определение 1.4.1. Пусть m и n – натуральные числа. $(m \times n)$ -**Матрицей** называется прямоугольная таблица A , имеющая m строк и n столбцов, с размещенными в ней некоторыми элементами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы a_{ij} имеет два индекса: первый i – номер строки; второй j – номер столбца, в которых стоит этот элемент. Чаще всего элементы матриц – это числа, в аналитической геометрии они могут быть также и векторами.

$(m \times n)$ -Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей** и обозначается $0_{m \times n}$ или просто 0, если ее размеры ясны из контекста.

Если числа строк и столбцов матрицы A совпадают и равны n , то A называется **квадратной матрицей порядка n** . Упорядоченное множество $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ элементов квадратной матрицы, у которых номера строк и столбцов совпадают, называется **диагональю** квадратной матрицы. Квадратная матрица порядка n , у которой все диагональные элементы равны 1, а все внедиагональные элементы равны 0, называется **единичной матрицей порядка n** и обозначается E_n или просто E , если ее порядок ясен из контекста. Например:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(1 \times n)$ -Матрица состоит из одной строки, $(m \times 1)$ -матрица – из одного столбца. При обозначении элементов таких матриц оставляют только один индекс, получая соответственно

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Если в некоторой матрице A поменять местами строки и столбцы (сохранив их порядок), то возникает матрица A^t , которая называется **транспонированной** для A .

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, то $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$. Таким образом, i -й строкой ма-

трицы A^t является i -й столбец матрицы A . Если матрица A имеет размеры $m \times n$, то транспонированная матрица A^t имеет размеры $n \times m$. При транспонировании квадратной матрицы порядка n вновь получается квадратная матрица такого же порядка. Матрица, транспонированная для строки, является столбцом, и наоборот.

Матрицы, элементами которых являются числа или векторы, можно умножать на числа.

Чтобы умножить матрицу A на вещественное число λ , надо каждый элемент матрицы A умножить на λ .

Полученная матрица обозначается λA . Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, то $2A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 10 & -16 \end{pmatrix}$; если $A = (\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c})$, то $(-1)A = -A = (-\bar{a} \quad -\bar{b} \quad -\bar{c})$.

Очевидно, что для любой матрицы A и любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ верны равенства:

$$1A = A,$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A),$$

$$(\lambda A)^t = \lambda(A^t).$$

Матрицы одинаковых размеров можно складывать. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, – числовые матрицы одинаковых размеров.

Суммой матрицы A и матрицы B называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются по правилу $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Сумма матриц A и B обозначается $A + B$. Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, то $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 10 & -8 \end{pmatrix}$. Поскольку при сложении матриц складываются их элементы, стоящие на одинаковых местах, то для операции сложения матриц справедливы такие же правила, по которым складываются числа. В частности, для любых матриц A, B, C одинаковых размеров верны равенства:

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$A + 0 = A,$$

$$A + (-A) = 0.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что операции сложения матриц, умножения матриц на числа и транспонирование матриц связаны равенствами:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t.$$

Для матриц определена также операция умножения. Для того чтобы можно было умножить матрицу A на матрицу B , число столбцов матрицы A должно совпадать с числом строк матрицы B .

Пусть $A = (a_{ij})$ – $(m \times n)$ -матрица, $B = (b_{ij})$ – $(n \times k)$ -матрица. **Произведением матрицы A на матрицу B** называется $(m \times k)$ -матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой вычисляются по правилу

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}; \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, k\}. \quad (1.4.1)$$

Таким образом, чтобы получить элемент c_{ij} матрицы произведения AB , стоящий в i -й строке и j -м столбце, надо последовательно выполнить следующие действия. В матрице A выбрать i -ю строку, в матрице B – j -й столбец. Если выбранную строку повернуть на 90° по часовой стрелке и приложить к выбранному столбцу, то возникает естественное взаимно-однозначное соответствие

$$a_{i1} \leftrightarrow b_{1j}, \quad a_{i2} \leftrightarrow b_{2j}, \dots, \quad a_{in} \leftrightarrow b_{nj}.$$

Соответствующие друг другу элементы надо попарно перемножить и полученные n произведений сложить. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{то } AB = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 22 & -9 \\ 4 & -19 & 7 \\ 14 & -21 & 7 \end{pmatrix}.$$

В приведенном примере $AB \neq BA$, т. е. умножение матриц не коммутативно (хотя нетрудно подобрать такие матрицы A и B , для которых $AB = BA$). Поэтому при вычислении произведений матриц надо учитывать порядок. С другой стороны, умножение матриц ассоциативно, а именно, если A – $(m \times n)$ -матрица, B – $(n \times k)$ -матрица, C – $(k \times l)$ -матрица, то

$$(AB)C = A(BC).$$

Связь умножения матриц с ранее введенными матричными операциями выражается следующими формулами:

$$\begin{aligned} E_m A &= A E_n = A, \\ A(B + C) &= AB + AC, \\ A(\lambda B) &= (\lambda A)B = \lambda(AB), \\ (AB)^t &= B^t A^t. \end{aligned}$$

Эти равенства справедливы для любого числа λ и любых матриц A, B, C , для которых определены матрицы AB и AC .

Некоторые из приведенных выше свойств умножения матриц очевидны. Доказательства других в общем случае даются в курсе алгебры. В их справедливости для матриц малых размерностей (не более трех), которые мы используем далее в курсе геометрии, можно убедиться самостоятельно.

У каждой числовой квадратной матрицы A имеется важная математическая характеристика: **определитель**, или **детерминант**, – это число, которое обозначается $\det(A)$ или $|A|$. Для квадратных матриц порядков два и три, которые нас интересуют, определители задаются формулами:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (1.4.2)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.4.3)$$

Из приведенных формул видно, что определитель матрицы третьего порядка – это сумма всевозможных произведений по три элемента, стоящих в различных строках и столбцах матрицы, половина из которых взята со знаком плюс, а половина – со знаком минус. Схемы выбора произведений этих двух типов показаны на рис. 1.4.1.



Рис. 1.4.1

Легко проверить, что определитель третьего порядка можно вычислить следующим образом через определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Такой способ вычисления определителя называется **разложением по первой строке**.

Отметим некоторые свойства определителей.

1. $\det(E_2) = \det(E_3) = 1$ – определитель единичной матрицы равен 1.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ – определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей сомножителей.
3. $\det(A^t) = \det(A)$ – при транспонировании определитель матрицы не меняется.
4. Если B – матрица, полученная из матрицы A перестановкой пары строк (или пары столбцов), то $\det(B) = -\det(A)$.

Справедливость этих свойств в общем случае доказывается в курсе алгебры. Для определителей второго и третьего порядков доказательства можно получить прямым вычислением, используя формулы (1.4.2) и (1.4.3).

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля, $\det(A) \neq 0$. Для каждой невырожденной $(n \times n)$ -матрицы $A = (a_{ij})$ существует единственная $(n \times n)$ -матрица A^{-1} такая, что верны равенства

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n. \quad (1.4.4)$$

Матрица A^{-1} называется **обратной** для A . Для нахождения обратной матрицы A^{-1} надо в указанном порядке выполнить следующие операции:

1. Вычислить определитель $\det(A)$ матрицы A и убедиться, что $\det(A) \neq 0$.
2. Для каждого элемента a_{ij} матрицы A вычислить **дополнительный минор** M_{ij} – определитель $((n-1) \times (n-1))$ -матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, т. е. строки и столбца, в которых стоит элемент a_{ij} . Из найденных элементов построить $(n \times n)$ -матрицу $M = (M_{ij})$.

3. Транспонировать матрицу M и изменить знак у тех элементов, где сумма номеров строк и столбцов, в которых они стоят, нечетная. Получится матрица $A' = (A'_{ij})$, у которой $A'_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$.

4. Разделить каждый элемент матрицы A' на $\det(A)$. Полученная матрица и будет обратной для A : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A'$.

В частности, если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – невырожденная матрица второго порядка, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

§ 1.5. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ. БАЗИСЫ

Пусть

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k - \quad (1.5.1)$$

конечная система векторов,

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k - \quad (1.5.2)$$

произвольные вещественные числа. Вектор

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \quad (1.5.3)$$

называется **линейной комбинацией** системы векторов (1.5.1) с коэффициентами (1.5.2). Говорят также, что \vec{a} **линейно выражается** через систему векторов (1.5.1).

Линейная комбинация (1.5.3) называется **тривиальной**, если все коэффициенты равны нулю: $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Очевидно, что тривиальная линейная комбинация любой системы векторов равна нулевому вектору: $0\vec{a}_1 + \dots + 0\vec{a}_k = \vec{0}$. Линейная комбинация (1.5.3) называется **нетривиальной**, если среди коэффициентов (1.5.2) есть ненулевые числа.

Принято различать системы векторов двух типов: *линейно независимые* и *линейно зависимые*. Системы первого типа – это такие системы векторов, для которых нулевой вектор нельзя получить никакой другой линейной комбинацией, кроме тривиальной. Такова, например, система, состоящая из одного ненулевого вектора: $\vec{a} \neq \vec{0}$. Действительно, равенство $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ возможно только если $\lambda = 0$. С другой стороны, легко привести примеры таких систем векторов, для которых существуют нетривиальные линейные комбинации, равные нулевому вектору. Например, такова система $\vec{a}, 2\vec{a}$, состоящая из двух коллинеарных векторов, так как $2 \cdot \vec{a} + (-1) \cdot (2\vec{a}) = \vec{0}$. Перейдем к точным определениям.

Определение 1.5.1. Система векторов (1.5.1) называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация системы (1.5.1), равная ну-

левому вектору. Система векторов, не являющаяся линейно зависимой, называется **линейно независимой**.

Более подробно определение 1.5.1 означает следующее. Система векторов (1.5.1) линейно зависима, если существует набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$, среди которых есть ненулевые, такой, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$. Система векторов (1.5.1) линейно независима, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, т. е. из равенства $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$ следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Далее рассмотрим алгебраические и геометрические критерии линейной зависимости и независимости векторов.

Утверждение 1.5.1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Доказательство. Если \vec{a} – нулевой вектор, то $1 \cdot \vec{a} = 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация вектора \vec{a} , равная нулевому вектору. Обратно, пусть для некоторого вектора \vec{a} существует число $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda \vec{a} = \vec{0}$. Переходя в последнем равенстве к длинам, получаем $|\lambda| |\vec{a}| = 0$. Поскольку $|\lambda| > 0$, то $|\vec{a}| = 0$, т. е. $\vec{a} = \vec{0}$. ►

Утверждение 1.5.2. Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы линейно выражается через другие.

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \quad k \geq 2, \quad - \quad (1.5.4)$$

линейно зависима система векторов. Существует набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$, среди которых есть ненулевые, такой, что

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}. \quad (1.5.5)$$

Пусть, для определенности, $\lambda_k \neq 0$. Умножим обе части равенства (1.5.5) на λ_k^{-1} . Получим

$$(\lambda_k^{-1} \lambda_1) \vec{a}_1 + \dots + (\lambda_k^{-1} \lambda_{k-1}) \vec{a}_{k-1} + \vec{a}_k = \vec{0} \quad \text{или} \\ \vec{a}_k = (-\lambda_k^{-1} \lambda_1) \vec{a}_1 + \dots + (-\lambda_k^{-1} \lambda_{k-1}) \vec{a}_{k-1}.$$

Итак, вектор \vec{a}_k линейно выражается через другие векторы системы.

Достаточность. Пусть один из векторов системы (1.5.4) линейно выражается через остальные, например, $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$. Тогда

$$1 \cdot \vec{a}_1 - \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots - \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0},$$

т. е. существует нетривиальная линейная комбинация векторов системы, равная нулевому вектору. Значит, система (1.5.4) линейно зависима. ►

Упражнение 1.5.1. Докажите, что система векторов линейно зависима, если выполняются условия:

- (i) система содержит нулевой вектор;
- (ii) система содержит повторяющиеся векторы;
- (iii) система содержит линейно зависимую подсистему.

Определение 1.5.2. Базисом множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$ векторов прямой \mathbf{E}^1 называется ненулевой вектор $\vec{e} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$.

Теорема 1.5.1. Пусть \vec{e} – базис множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$. Тогда любой вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$ линейно выражается через \vec{e} :

$$\vec{a} = x\vec{e}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1.5.6)$$

Число x определяется однозначно и называется **координатой** вектора \vec{a} в данном базисе.

Доказательство. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} = 0 \cdot \vec{e}$, т. е. $x = 0$. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Отложим векторы \vec{a} и \vec{e} от некоторой точки $O \in \mathbf{E}^1$. Получим соответственно точки A и E на прямой \mathbf{E}^1 , отличные от точки O (рис. 1.5.1).

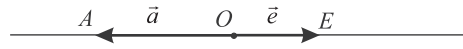


Рис. 1.5.1

Тогда, очевидно, $\vec{a} = \frac{|OA|}{|OE|}\vec{e}$, если точки A и E лежат на одном луче с вершиной в точке O , либо $\vec{a} = -\frac{|OA|}{|OE|}\vec{e}$, если точки A и E лежат на различных лучах с верши-

ной в точке O . Таким образом, $x = \pm \frac{|OA|}{|OE|}$, т. е. координата вектора \vec{a} с точностью до знака равна отношению длин: $x = \pm |\vec{a}| : |\vec{e}|$. Для любого вектора доказана возможность представления в виде (1.5.6). Докажем единственность такого представления. Пусть наряду с (1.5.6) верно равенство

$$\vec{a} = x'\vec{e}, \quad x' \in \mathbf{R}. \quad (1.5.7)$$

Из (1.5.7) и (1.5.6) вытекает, что $\vec{0} = (x' - x)\vec{e}$. Поскольку вектор \vec{e} ненулевой, то $x' - x = 0$, т. е. $x' = x$. ►

Итак, если на прямой зафиксирован базис, то любой вектор этой прямой имеет однозначно определяемую координату x в этом базисе. Если x – координата вектора \vec{a} в данном базисе, то используют запись $\vec{a}(x)$. Отметим, что в случае, когда длина базисного вектора \vec{e} равна 1, координата x вектора \vec{a} с точностью до знака совпадает с его длиной: $x = |\vec{a}|$, если $\vec{a} \uparrow \vec{e}$, либо $x = -|\vec{a}|$, если $\vec{a} \downarrow \vec{e}$.

Утверждение 1.5.3. Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы системы коллинеарны.

Доказательство. Необходимость. Пусть \vec{a}_1, \vec{a}_2 – линейно зависящая система векторов. По утверждению 1.5.2 один из векторов линейно выражается через другой, т. е. $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ или $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$. Следовательно, векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 коллинеарны.

Достаточность. Пусть \vec{a}_1, \vec{a}_2 – коллинеарные векторы. Если они оба нулевые, то, очевидно, система \vec{a}_1, \vec{a}_2 линейно зависима. Пусть один из векторов, например \vec{a}_1 , ненулевой. Отложим векторы \vec{a}_1, \vec{a}_2 от некоторой точки O , получим соответственно точки A_1 и A_2 , лежащие на прямой Δ , проходящей через точку O . Таким образом, можно считать, что \vec{a}_1, \vec{a}_2 – векторы прямой Δ , причем \vec{a}_1 можно взять в качестве базиса множества $\mathbf{V}(\Delta)$. По теореме 1.5.1 $\vec{a}_2 = x\vec{a}_1$, т. е. один из векторов системы линейно выражается через другой. Согласно утверждению 1.5.2, система \vec{a}_1, \vec{a}_2 линейно зависима. ►

Следствие 1.5.1. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.

Определение 1.5.3. Базисом множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ векторов плоскости \mathbf{E}^2 называется упорядоченная пара (\vec{e}_1, \vec{e}_2) неколлинеарных векторов этой плоскости.

Теорема 1.5.2. Пусть (\vec{e}_1, \vec{e}_2) – базис множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$. Тогда любой вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ линейно выражается через базис (раскладывается по базису):

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad x, y \in \mathbf{R}. \quad (1.5.8)$$

Числа x и y определяются однозначно и называются **координатами** вектора \vec{a} в данном базисе.

Доказательство. Если вектор \vec{a} нулевой, то $\vec{a} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$, т. е. для этого вектора $x = y = 0$.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}$ от некоторой точки $O \in \mathbf{E}^2$. Получим соответственно точки E_1, E_2, A , отличные от точки O . Обозначим Δ_1 прямую, проходящую через точки O и E_1 , Δ_2 – прямую, проходящую через точки O и E_2 .

Если вектор \vec{a} коллинеарен вектору \vec{e}_1 , то точка A лежит на прямой Δ_1 . В этом случае можно считать, что \vec{a} и \vec{e}_1 – векторы прямой Δ_1 , причем \vec{e}_1 – базис множества $\mathbf{V}(\Delta_1)$. Тогда, согласно теореме 1.5.1, $\vec{a} = x\vec{e}_1 = x\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$. Аналогично доказывается возможность представления (6) в случае, когда вектор \vec{a} коллинеарен второму базисному вектору.

Пусть вектор \vec{a} не коллинеарен ни одному из базисных векторов. Проведем через точку A прямые Δ'_1 и Δ'_2 , параллельные соответственно Δ_1 и Δ_2 . Пусть A_1 – точка пересечения прямых Δ_1 и Δ'_2 , A_2 – точка пересечения Δ_2 и Δ'_1 . По построению OA_1AA_2 – параллелограмм (рис. 1.5.2).

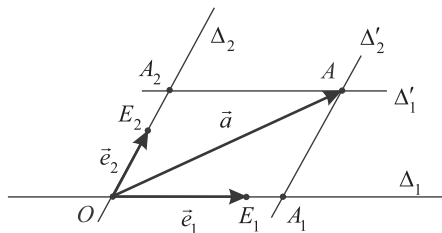


Рис. 1.5.2

Векторы \vec{e}_1 и $\overrightarrow{OA_1}$ – векторы прямой Δ_1 , причем \vec{e}_1 – базис множества $\mathbf{V}(\Delta_1)$. Согласно теореме 1.5.1, существует число $x \in \mathbf{R}$ такое, что $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{e}_1$. Аналогично существует число $y \in \mathbf{R}$ такое, что $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{e}_2$. По правилу параллелограмма $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Итак, для любого вектора $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ доказана возможность разложения (1.5.8). Однозначность чисел x и y в (1.5.8) следует из линейной независимости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Действительно, пусть наряду с (1.5.8) верно равенство

$$\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2, \quad x', y' \in \mathbf{R}. \quad (1.5.9)$$

Вычисляя разность (7) и (6), получаем $\vec{0} = (x' - x)\vec{e}_1 + (y' - y)\vec{e}_2$. Поскольку \vec{e}_1 и \vec{e}_2 линейно независимы, то $x' - x = 0$, $y' - y = 0$, т. е. $x' = x$, $y' = y$. ►

Запись $\vec{a}(x, y)$ означает, что (x, y) – координаты вектора \vec{a} в данном базисе. Будем использовать также следующие матричные обозначения:

$[\vec{e}] = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)$ – матрица-строка базисных векторов;

$(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор-столбец координат.

В таких обозначениях вектор есть произведение матриц:

$$\vec{a} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \quad ^1$$

Итак, короткая матричная запись равенства (1.5.8) имеет вид

$$\vec{a} = [\vec{e}](x). \quad (1.5.10)$$

Утверждение 1.5.4. Система, состоящая из трех векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы системы компланарны.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – линейно зависимая система векторов. По утверждению 1.5.2 один из векторов линейно выражается через другие. Пусть, для определенности, $\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$. Существует плоскость π , которой параллельны векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 . Поскольку \vec{a}_3 линейно выражается через \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , то вектор \vec{a}_3 также параллелен плоскости π . Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарны.

Достаточность. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – компланарные векторы. Можно считать, что $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – векторы некоторой плоскости π . Если векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 не коллинеарны, то их можно взять в качестве базиса множества $\mathbf{V}(\pi)$. По теореме 1.5.2 существуют числа x, y такие, что $\vec{a}_3 = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2$. Так как один из векторов линейно выражается через другие, то, по утверждению 1.5.2, система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависима. Если же векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 коллинеарны, то, согласно утверждению 1.5.3, система \vec{a}_1, \vec{a}_2 линейно зависима. А тогда система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ также линейно зависима. ►

Следствие 1.5.2. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некопланарны.

Определение 1.5.4. Базисом множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ векторов пространства \mathbf{E}^3 называется упорядоченная тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ некопланарных векторов.

Теорема 1.5.3. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис множества векторов пространства $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$. Тогда любой вектор $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ линейно выражается через базис (раскладывается по базису):

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad x, y, z \in \mathbf{R}. \quad (1.5.11)$$

Числа x, y, z определяются однозначно и называются **координатами** вектора \vec{a} в данном базисе.

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.5.2. Вначале доказывается возможность представления любого вектора в виде (1.5.11), а затем его единственность.

¹ Здесь в записи произведения вектора \vec{a} на число λ мы не различаем обозначения $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}\lambda$.

Отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ от одной точки O . Возникают три точки E_1, E_2, E_3 , не лежащие с точкой O в одной плоскости, три прямые $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, определяемые парами точек $\{O, E_1\}, \{O, E_2\}, \{O, E_3\}$ соответственно, и три плоскости π_1, π_2, π_3 , определяемые тройками точек $\{O, E_2, E_3\}, \{O, E_1, E_3\}, \{O, E_1, E_2\}$ соответственно. Вектор \vec{a} также откладывается от точки O , возникает точка A такая, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 1.5.3).

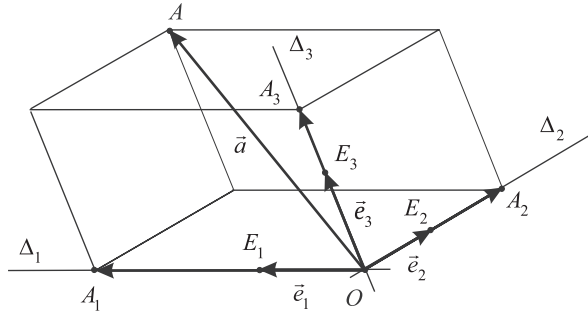


Рис. 1.5.3

Если точка A принадлежит плоскости π_1 , то векторы $\vec{a}, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ можно считать векторами этой плоскости, и поскольку векторы \vec{e}_2, \vec{e}_3 линейно независимы, то они составляют базис множества $\mathbf{V}(\pi_1)$. По теореме 1.5.2 вектор \vec{a} можно разложить по этому базису: $\vec{a} = y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, $y, z \in \mathbf{R}$. Разложение (1.5.11) в таком случае имеет вид $\vec{a} = 0 \cdot \vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Аналогично доказывается возможность разложения (1.5.11) в случаях, когда $A \in \pi_2$ или $A \in \pi_3$.

Пусть точка A не принадлежит ни одной из плоскостей π_1, π_2, π_3 . Спроектируем точку A на каждую прямую Δ_i параллельно плоскости $\pi_i, i \in \{1, 2, 3\}$. Возникают точки $A_i = \text{pr}_{\Delta_i} A, i \in \{1, 2, 3\}$ такие, что OA_1, OA_2, OA_3 – ребра некоторого параллелепипеда (см. рис. 1.5.3). Согласно правилу параллелепипеда, верно следующее равенство:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}. \quad (1.5.12)$$

Далее раскладываем каждый вектор $\overrightarrow{OA_i}, i \in \{1, 2, 3\}$, по базисному вектору \vec{e}_i соответствующей прямой: $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{e}_1, \overrightarrow{OA_2} = y\vec{e}_2, \overrightarrow{OA_3} = z\vec{e}_3$. Подставляя эти разложения в равенство (1.5.12), получаем искомое равенство (1.5.11).

Однозначность чисел x, y, z в (1.5.11) следует из линейной независимости векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и доказывается так же, как в теореме 1.5.2. ►

Если (x, y, z) – координаты вектора \vec{a} в данном базисе, то применяют запись $\vec{a}(x, y, z)$. Будем использовать также матричные обозначения, аналогичные случаю плоскости:

$[\vec{e}] = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$ – матрица-строка базисных векторов;

$(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – вектор-столбец координат.

В таких обозначениях короткая матричная запись равенства (1.5.11) имеет вид

$$\vec{a} = [\vec{e}](x). \quad (1.5.13)$$

Утверждение 1.5.5. Любая система векторов пространства E^3 , содержащая более трех векторов, линейно зависима.

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$, $k \geq 4$, – система векторов, состоящая из четырех или более векторов. Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ некопланарны, то они образуют базис множества $V(E^3)$ и, следовательно, четвертый вектор линейно выражается через первые три. По утверждению 1.5.2 система $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависима. Если же векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарны, то они линейно зависимы, следовательно, линейно зависима и данная система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$. ►

Утверждение 1.5.6. Координаты вектора, являющегося линейной комбинацией системы векторов, есть такие же линейные комбинации соответствующих координат векторов системы.

Доказательство. Проведем доказательство для случая пространства, в случаях прямой и плоскости рассуждения не меняются, уменьшается только число координат. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис множества векторов пространства $V(E^3)$, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – система векторов, $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$ – их линейная комбинация. Пусть (x, y, z) – координаты вектора \vec{a} , (x_i, y_i, z_i) – координаты векторов \vec{a}_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, в данном базисе.

Разложим векторы \vec{a} и \vec{a}_i по базисным векторам:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad \vec{a}_i = x_i\vec{e}_1 + y_i\vec{e}_2 + z_i\vec{e}_3, \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

и подставим эти выражения в равенство $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$. Пользуясь свойствами операций над векторами, получим

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k)\vec{e}_1 + (\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k)\vec{e}_2 + (\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_k z_k)\vec{e}_3.$$

Поскольку координаты вектора в данном базисе определяются однозначно, то верны равенства:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k,$$

$$y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k,$$

$$z = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_k z_k,$$

выражающие заключение доказываемого утверждения. ►

Следствие 1.5.3. Пусть $\vec{a}(x, y, z)$ и $\vec{b}(x', y', z')$ – векторы, заданные своими координатами в некотором базисе, λ – вещественное число. Тогда векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\lambda \vec{a}$ имеют в этом базисе следующие координаты:

$$(\vec{a} + \vec{b})(x + x', y + y', z + z'), \quad \lambda \vec{a}(\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Среди множества всех базисов выделяют так называемые ортонормированные, которые, как будет видно в дальнейшем, удобны при вычислениях.

Определение 1.5.5. Ортонормированным базисом называется базис, векторы которого попарно ортогональны и имеют единичную длину.

Обычно ортонормированные базисы на плоскости обозначаются (\vec{i}, \vec{j}) , в пространстве – $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (рис. 1.5.4).

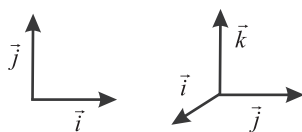


Рис. 1.5.4

С помощью базисов можно ввести понятие *ориентации* прямой, плоскости и пространства.

Пусть \vec{e} и \vec{e}' – базисы прямой \mathbf{E}^1 . Направления двух ненулевых векторов прямой могут быть совпадающими либо противоположными. В первом случае будем говорить, что базисы \vec{e} и \vec{e}' **одинаково ориентированы**, во-втором – **противоположно ориентированы**. Очевидно, что отношение одинаковой ориентуемости является *отношением эквивалентности* (см. [9, § 9]) в множестве всех базисов. Следовательно, множество всех базисов разбивается на классы эквивалентности – классы одинаково ориентированных базисов. Понятно, что таких классов ровно два, столько же, сколько направлений на прямой. Выбор одного из двух классов одинаково ориентированных базисов называется **ориентацией** прямой. Таким образом, на прямой есть две ориентации. Ориентировать прямую означает выбрать на ней одно из двух направлений.

Пусть (\vec{e}_1, \vec{e}_2) – базис на плоскости \mathbf{E}^2 . Отложим векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 от некоторой точки O , получим точки E_1 и E_2 соответственно, не лежащие на одной прямой с точкой O (рис. 1.5.5).

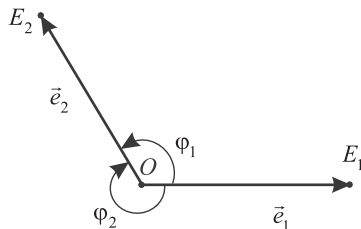


Рис. 1.5.5

Отрезок OE_1 можно повернуть вокруг точки O на угол, не превосходящий полный угол так, чтобы он наложился на отрезок OE_2 . Существуют два различных направления такого поворота. Поворачиваясь в одном направлении, отрезок OE_1 «заметет» угол, величина которого φ_1 меньше π , поворачиваясь в другом направлении, отрезок OE_1 «заметет» угол, величина которого φ_2 больше π . Разумеется, направления поворотов и величины соответствующих углов не зависят от выбора точки O . Допуская вольность речи, будем говорить, что поворачивая отрезки вокруг точки, мы поворачиваем соответствующие векторы вокруг этой точки.

Пусть (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) – базисы на плоскости \mathbf{E}^2 . Будем говорить, что эти базисы **одинаково ориентированы**, если направления кратчайших поворотов первых базисных векторов до вторых в обоих базисах совпадают. В противном случае говорят, что базисы **противоположно ориентированы**. Одинаково ориентированные базисы изображены на рис. 1.5.6, а, противоположно ориентированные базисы – на рис. 1.5.6, б.

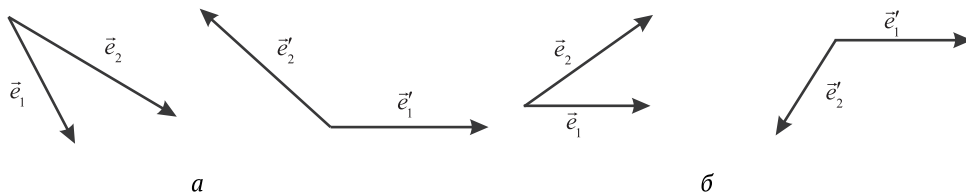


Рис. 1.5.6

Как и в случае прямой, отношение одинаковой ориентируемости базисов на плоскости, очевидно, является отношением эквивалентности в множестве всех базисов плоскости. Следовательно, множество всех базисов разбивается на классы эквивалентности – классы одинаково ориентированных базисов. Ясно, что таких классов ровно два, столько же, сколько направлений поворотов вокруг точек. Выбор одного из двух классов одинаково ориентированных базисов называется **ориентацией плоскости**. Таким образом, на плоскости есть две ориентации; ориентировать плоскость означает выбрать на ней одно из двух возможных направлений поворотов вокруг точек (рис. 1.5.7, а, б).



Рис. 1.5.7

В пространстве E^3 , так же как в случаях прямой и плоскости, множество всех базисов разбивается на два класса, определяющих две ориентации пространства. Однако, в отличие от случаев прямой и плоскости, где невозможно (с нашей точки зрения наблюдателя из пространства) выделить одну из двух ориентаций (и, следовательно, нельзя дать им различные названия), в пространстве ориентации различаются, и одна из них называется *правой*, а другая – *левой*. Соответственно базисы, составляющие первый класс, называются *правыми*, а базисы, составляющие второй класс, – *левыми*. Эти два типа базисов определяются следующим образом.

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис в пространстве E^3 . Отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ от некоторой точки O , получим точки E_1, E_2, E_3 соответственно. Обозначим π плоскость, проходящую через точки O, E_1, E_2 (рис. 1.5.8).

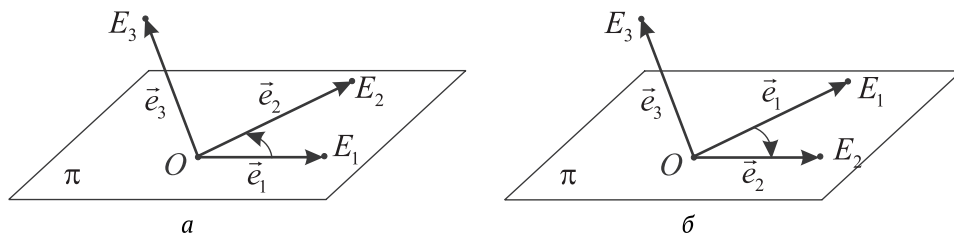


Рис. 1.5.8

Поскольку векторы, составляющие базис, не компланарны, то точка E_3 не лежит в плоскости π , а лежит в одном из двух полупространств, на которые пространство разбивается плоскостью π . Базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется **правым**, если, глядя на плоскость π из точки E_3 (из «конца» вектора \vec{e}_3), мы видим кратчайший поворот вектора \vec{e}_1 до вектора \vec{e}_2 , происходящий в направлении, противоположном направлению поворота часовой стрелки (рис. 1.5.8, а). Базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется **левым**, если, глядя из «конца» вектора \vec{e}_3 , мы видим кратчайший поворот вектора \vec{e}_1 до вектора \vec{e}_2 , происходящий в направлении движения часовой стрелки (рис. 1.5.8, б). Моделями правого и левого базисов могут служить первые три пальца руки человека, соответственно правой и левой, расположенных в естественном положении (рис. 1.5.9).

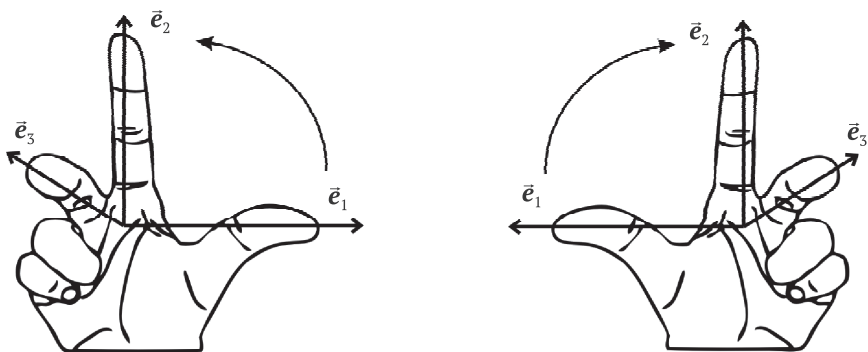


Рис. 1.5.9

Этим объясняется употребление терминов *правый* и *левый*. **Правой (левой) ориентацией пространства E^3** называется выбор класса правых (левых) базисов множества векторов пространства. Легко убедиться, что справедливы следующие свойства ориентации:

- (i) перестановка любых двух векторов в упорядоченной тройке некопланарных векторов меняет ориентацию на противоположную;
- (ii) замена одного из векторов в упорядоченной тройке некопланарных векторов на противоположный вектор меняет ориентацию на противоположную.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – три некопланарных вектора. На их основе можно образовать шесть различных упорядоченных троек, из которых три тройки правых и три – левых. Действительно, зафиксируем одну из них – упорядоченную тройку $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Каждая из троек $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$, $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$ получена из данной перестановкой двух элементов, следовательно, каждая из троек $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$, $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$ имеет ориентацию, противоположную ориентации тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. С другой стороны, тройки $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ и $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ можно получить из тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ два раза, переставляя пары элементов, следовательно, тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ имеют одинаковую ориентацию.

§ 1.6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1.6.1. Пусть \vec{a} и \vec{b} – произвольные векторы. **Скалярным произведением** вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется число (скаляр), которое обозначается $\vec{a}\vec{b}$ и определяется следующим образом:

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, & \text{если } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{b} \neq \vec{0} \text{ } (\varphi - \text{величина угла между } \vec{a} \text{ и } \vec{b}), \\ 0, & \text{если хотя бы один из векторов } \vec{a} \text{ или } \vec{b} \text{ нулевой.} \end{cases}$$

Скалярный квадрат вектора \vec{a} , т. е. неотрицательное число $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$, будем обозначать \vec{a}^2 . Из определения вытекают следующие формулы для вычисления длины произвольного вектора \vec{a} и величины угла между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} через скалярное произведение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (1.6.1)$$

Приведем далее утверждение технического характера, которое понадобится нам при доказательстве одного из свойств скалярного произведения.

Лемма 1.6.1. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, Δ – прямая с направляющим вектором \vec{a} , $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ – базисный вектор единичной длины множества $\mathbf{V}(\Delta)$. Тогда число $|\vec{b}| \cos \varphi$ есть координата ортогональной проекции $\text{pr}_{\Delta} \vec{b}$ вектора \vec{b} на прямую Δ в базисе \vec{a}_0 .

Доказательство. Отложим от точки $O \in \Delta$ вектор \vec{b} , получим точку B . Пусть B_1 – ортогональная проекция точки B на прямую Δ (рис. 1.6.1).

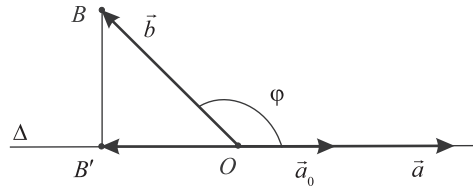


Рис. 1.6.1

Тогда вектор $\overline{OB_1}$ есть ортогональная проекция $\text{pr}_{\Delta} \vec{b}$ вектора \vec{b} на прямую Δ . Пусть x – координата вектора $\overline{OB_1}$ в единичном базисе \vec{a}_0 . В § 1.3 отмечалось, что $x = |\overline{OB_1}|$, если векторы $\overline{OB_1}$ и \vec{a}_0 сонаправлены, и $x = -|\overline{OB_1}|$, если векторы $\overline{OB_1}$ и \vec{a}_0 противоположно направлены. Заметим, что в обоих случаях $x = |\vec{b}| \cos \varphi$. Действительно, если $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\overline{OB'} \uparrow \vec{a}_0$ и $|\vec{b}| \cos \varphi = |\overline{OB'}| = x$; если же $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$, то $\overline{OB'} \downarrow \vec{a}_0$ и $|\vec{b}| \cos \varphi = -|\overline{OB'}| = x$. ►

Следующее утверждение описывает основные свойства скалярного произведения и, в частности, показывает, как скалярное произведение связано с операциями сложения векторов и умножения векторов на числа.

Утверждение 1.6.1. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ и любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ верны следующие равенства:

- (i) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ – свойство коммутативности скалярного произведения;
- (ii) $(\lambda \vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
- (iii) $\begin{cases} (\vec{b} + \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{a} + \vec{c}\vec{a}, \\ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}. \end{cases}$

Справедливость равенств (ii) и (iii) означает, что скалярное произведение билинейно.

$$(iv) \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Свойство (iv) означает, что равенство нулю скалярного произведения двух векторов является **критерием их ортогональности**.

Доказательство. (i) Коммутативность скалярного произведения вытекает непосредственно из определения.

(ii) Все три числа $(\lambda\vec{a})\vec{b}$, $\vec{a}(\lambda\vec{b})$, $\lambda(\vec{a}\vec{b})$ равны нулю, если хотя бы один из векторов нулевой или $\lambda = 0$. Если же векторы ненулевые и $\lambda \neq 0$, то каждое из трех указанных выше чисел равно $\lambda |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$.

(iii) В силу коммутативности скалярного произведения достаточно доказать справедливость первого из двух равенств в (iii). Если хотя бы один из трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ нулевой или $\vec{c} = -\vec{b}$, то равенство, очевидно, верно. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}$ – ненулевые векторы. Пусть φ – величина угла между векторами \vec{a} и \vec{b} , ψ – величина угла между векторами \vec{a} и \vec{c} , θ – величина угла между векторами \vec{a} и $\vec{b} + \vec{c}$. Отложим от некоторой точки O вектор \vec{a} . Получим точку A , отличную от O . Обозначим Δ прямую, проходящую через O и A . В силу леммы 1.6.1 имеем

$$|\vec{b}| \cos \varphi = x_b, \quad |\vec{c}| \cos \psi = x_c, \quad |\vec{b} + \vec{c}| \cos \theta = x_{b+c} -$$

координаты ортогональных проекций $\text{pr}_{\Delta}\vec{b}, \text{pr}_{\Delta}\vec{c}, \text{pr}_{\Delta}(\vec{b} + \vec{c})$ векторов $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}$ на прямую Δ в базисе $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Теперь, используя вначале утверждение 1.3.1 о том, что проекция суммы векторов равна сумме проекций, а затем следствие 1.4.1 о том, что координата суммы векторов равна сумме координат, получим

$$|\vec{b}| \cos \varphi + |\vec{c}| \cos \psi = |\vec{b} + \vec{c}| \cos \theta.$$

Умножив обе части последнего равенства на число $|\vec{a}|$, имеем

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi + |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \psi = |\vec{a}| |\vec{b} + \vec{c}| \cos \theta,$$

т. е. $(\vec{b} + \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{a} + \vec{c}\vec{a}$.

(iv) Если $\vec{a}\vec{b} = 0$, то выполняется хотя бы одно из условий:

$$|\vec{a}| = 0 \text{ или } |\vec{b}| = 0, \text{ или } \cos \varphi = 0.$$

Из каждого условия следует ортогональность векторов \vec{a} и \vec{b} . Обратно, если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то хотя бы один из векторов нулевой, или $\cos \varphi = 0$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b} = 0$. ►

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в некотором базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Пользуясь билинейностью, скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ можно выразить через скалярные произведения базисных векторов:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3)(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) = \\ &= x_1x_2(\vec{e}_1^2) + x_1y_2(\vec{e}_1\vec{e}_2) + x_1z_2(\vec{e}_1\vec{e}_3) + \\ &+ y_1x_2(\vec{e}_2\vec{e}_1) + y_1y_2(\vec{e}_2^2) + z_1z_2(\vec{e}_2\vec{e}_3) + \\ &+ z_1x_2(\vec{e}_3\vec{e}_1) + z_1y_2(\vec{e}_3\vec{e}_2) + z_1z_2(\vec{e}_3^2). \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Построим таблицу умножения (скалярного) базисных векторов.

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}_1	g_{11}	g_{12}	g_{13}
\vec{e}_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}
\vec{e}_3	g_{31}	g_{32}	g_{33}

В этой таблице число g_{ij} обозначает скалярное произведение $\vec{e}_i \vec{e}_j$. В силу свойств скалярного произведения имеем $g_{ij} = g_{ji}$, $g_{ii} > 0$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Теперь скалярное произведение (1.6.2) векторов \vec{a} и \vec{b} коротко можно записать в виде

$$\vec{a}\vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i x_j. \quad (1.6.3)$$

Удобно использовать также матричные обозначения. Пусть

$$(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, (y) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \text{координатные столбцы векторов } \vec{a} \text{ и } \vec{b};$$

$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$ – матрица попарных скалярных произведений базисных векторов. Матрица G называется **матрицей скалярного произведения** в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Равенство (1.6.3) теперь записывается в виде произведения трех матриц:

$$\vec{a}\vec{b} = (x_1 \ y_1 \ z_1) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = (x)^t G (y).$$

Наиболее простой вид формула (1.6.3) принимает, если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе. Действительно, пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – ортонормированный базис. Тогда скалярные квадраты базисных векторов равны 1, а попарные произведения различных базисных векторов равны 0, т. е.

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0.$$

Таким образом, матрица скалярного произведения в ортонормированном базисе – единичная. В этом случае скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

а формулы (1.6.1) для длины вектора и величины угла между векторами имеют вид

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1.6.4)$$

Если векторы $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе (\vec{i}, \vec{j}) плоскости, то получим аналоги формул (1.6.4):

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \quad (1.6.5)$$

Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – ортонормированный базис множества векторов $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$, $\vec{a}(x, y, z)$ – произвольный вектор, заданный своими координатами в этом базисе. Вычислим скалярные произведения вектора \vec{a} и базисных векторов:

$$\vec{a}\vec{i} = x(\vec{i}\vec{i}) + y(\vec{j}\vec{i}) + z(\vec{k}\vec{i}) = x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 = x,$$

$$\vec{a}\vec{j} = x(\vec{i}\vec{j}) + y(\vec{j}\vec{j}) + z(\vec{k}\vec{j}) = x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0 = y,$$

$$\vec{a}\vec{k} = x(\vec{i}\vec{k}) + y(\vec{j}\vec{k}) + z(\vec{k}\vec{k}) = x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1 = z.$$

Таким образом, мы показали, что координаты любого вектора в ортонормированном базисе суть скалярные произведения этого вектора и базисных векторов.

В частности, если $\vec{e}(x, y, z)$ – единичный вектор, $|\vec{e}| = 1$, то получим, что

$$x = \vec{e}\vec{i} = |\vec{e}| |\vec{i}| \cos \alpha = \cos \alpha,$$

$$y = \vec{e}\vec{j} = |\vec{e}| |\vec{j}| \cos \beta = \cos \beta,$$

$$z = \vec{e}\vec{k} = |\vec{e}| |\vec{k}| \cos \gamma = \cos \gamma.$$

Здесь α, β, γ – величины углов между вектором \vec{e} и базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно. Координаты единичного вектора \vec{e} , т. е. числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются **направляющими косинусами** для вектора \vec{e} , а также для любого вектора \vec{a} , сонаправленного с вектором \vec{e} , $\vec{a} \uparrow \vec{e}$ (рис. 1.6.2).

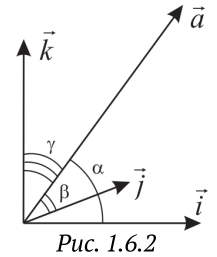


Рис. 1.6.2

§ 1.7. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1.7.1. Пусть \vec{a} и \vec{b} – неколлинеарные векторы. **Векторным произведением** вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор, который обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ и определяется следующими условиями:

(i) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi;$

(ii) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b};$

(iii) упорядоченная тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ – правая.

Если \vec{a} и \vec{b} – коллинеарные векторы, то их **векторное произведение** полагают равным нулевому вектору: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Отметим, что в случае неколлинеарных векторов для определения вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ нужны все три условия (i), (ii) и (iii): условие (i) определяет только длину (ненулевую) вектора $\vec{a} \times \vec{b}$. Условиям (i) и (ii), очевидно, удовлетворяют два взаимно противоположных вектора. И только все три условия (i), (ii), (iii) задают вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ однозначно (рис. 1.7.1).

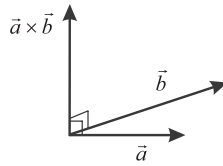


Рис. 1.7.1

Заметим также, что для неколлинеарных векторов длина $|\vec{a} \times \vec{b}|$ векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} (рис. 1.7.2).

Рассмотрим геометрическую конструкцию, позволяющую строить векторное произведение $\vec{a}_0 \times \vec{b}$ векторов, первый из которых имеет единичную длину, $|\vec{a}_0| = 1$.

Пусть π – плоскость, перпендикулярная вектору \vec{a}_0 , отложенному от точки $O \in \pi$ (рис. 1.7.3). Отложим вектор \vec{b} от точки O , получим точку B . Пусть B' – ортогональная проекция точки B на плоскость π . Если векторы \vec{a}_0 и \vec{b} коллинеарны, то $B' = O$. Если векторы \vec{a}_0 и \vec{b} не коллинеарны, то $B' \neq O$. Повернем отрезок OB' вокруг точки O на угол 90° в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если смотреть на плоскость π из полупространства, в которое направлен вектор \vec{a}_0 . Получим отрезок OB'' . В случае коллинеарности \vec{a}_0 и \vec{b} отрезок – нулевой, следовательно, $\overrightarrow{OB''} = \vec{0}$, т. е. вектор $\overrightarrow{OB''}$ совпадает с вектором $\vec{a}_0 \times \vec{b}$. Убедимся, что $\overrightarrow{OB''} = \vec{a}_0 \times \vec{b}$ и в случае, когда векторы \vec{a}_0 и \vec{b} не коллинеарны (φ – величина угла между \vec{a}_0 и \vec{b}). Проверяем условия (i), (ii), (iii) определения 1.7.1:

$$(i) |\overrightarrow{OB''}| = |\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OB}| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = |\overrightarrow{OB}| \sin \varphi =$$

$$= 1 \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin \varphi = |\vec{a}_0| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi;$$

$$(ii) \overrightarrow{OB''} \perp \vec{a}_0, \overrightarrow{OB''} \perp \vec{b} \text{ (по построению);}$$

$$(iii) \text{ тройка } (\vec{a}_0, \vec{b}, \overrightarrow{OB''}) \text{ – правая (по построению).}$$

Таким образом, векторное произведение $\vec{a}_0 \times \vec{b}$ единичного вектора \vec{a}_0 на вектор \vec{b} получается последовательным выполнением двух операций: ортогональной проекции pr_π вектора \vec{b} на плоскость π (получаем вектор $\overrightarrow{OB'} = \text{pr}_\pi \vec{b}$) и последующим поворотом rot_O на угол 90° полученного вектора в плоскости π вокруг точки O (получаем вектор $\text{rot}_O(\overrightarrow{OB'}) = \overrightarrow{OB''} = \vec{a}_0 \times \vec{b}$).

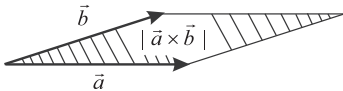


Рис. 1.7.2

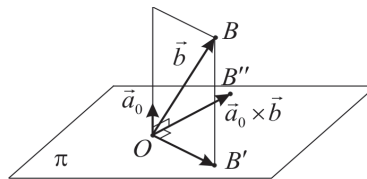


Рис. 1.7.3

Ранее отмечалось (см. § 1.3), что проектирование является линейным оператором, в частности, проектирование перестановочно с операцией сложения векторов:

$$\forall \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3) \quad \text{pr}_\pi(\vec{b} + \vec{c}) = \text{pr}_\pi(\vec{b}) + \text{pr}_\pi(\vec{c}).$$

Аналогичным свойством обладает и поворот векторов плоскости вокруг фиксированной точки на угол 90° , т. е.

$$\forall \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^2) \quad \text{rot}_O(\vec{b} + \vec{c}) = \text{rot}_O(\vec{b}) + \text{rot}_O(\vec{c}).^1$$

Убедимся в справедливости последнего равенства в случае, когда векторы \vec{b} и \vec{c} неколлинеарны. В этом случае сумму $\vec{b} + \vec{c}$ можно найти по правилу параллелограмма: $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ (рис. 1.7.4). Повернем параллелограмм $OBDC$ как целое вокруг точки O на угол 90° . При этом векторы $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}$ также повернутся на угол 90° и перейдут в векторы $\text{rot}_O(\vec{b}) = \overrightarrow{OB'}$, $\text{rot}_O(\vec{c}) = \overrightarrow{OC'}$, $\text{rot}_O(\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OD'}$ соответственно. Поскольку после поворота параллелограмм останется параллелограммом, то $\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OD'}$. Это и означает справедливость доказываемого равенства. Похожим образом рассматривается случай коллинеарных векторов.

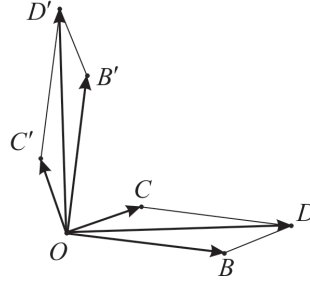


Рис. 1.7.4

Сказанное выше позволяет утверждать, что для любого единичного вектора \vec{a}_0 и любых векторов \vec{b} и \vec{c} справедливо равенство

$$\vec{a}_0 \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}_0 \times \vec{b}) + (\vec{a}_0 \times \vec{c}). \quad (1.7.1)$$

Установим теперь основные свойства векторного произведения.

Утверждение 1.7.1. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ и любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ верны следующие равенства:

- (i) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ – свойство антикоммутативности векторного произведения;
- (ii) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
- (iii)
$$\begin{cases} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), \\ (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a}). \end{cases}$$

Справедливость равенств (ii) и (iii) означает, что векторное произведение (как и скалярное) билинейно.

- (iv) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

¹ Как показывают приведенные ниже рассуждения, доказываемая формула справедлива для поворота не только на 90° , но и на любой другой угол.

Свойство (iv) означает, что равенство нулю векторного произведения двух векторов является **критерием их коллинеарности**.

Доказательство. (i) По определению в случае коллинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} имеем $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$, следовательно, доказываемое равенство верно. Если \vec{a} и \vec{b} – неколлинеарные векторы, то для векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ условия (i) и (ii) определения 1.7.1 совпадают, следовательно, векторы $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ либо совпадают, либо противоположны. Рассмотрим правую тройку $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$, из которой можно получить тройку $(\vec{b}, \vec{a}, -(\vec{a} \times \vec{b}))$, применяя последовательно две операции: вначале переставляя первых два элемента, а затем меняя третий вектор на противоположный. Поскольку каждая из этих операций меняет ориентацию на противоположную (см. § 1.5), то тройка $(\vec{b}, \vec{a}, -(\vec{a} \times \vec{b}))$ – правая. Следовательно, $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$.

(ii) Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны или $\lambda = 0$, то векторы $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$, $\vec{a} \times (\lambda \vec{b})$, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ – нулевые, следовательно, они совпадают. Пусть \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны и $\lambda \neq 0$. Тогда каждый из векторов $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$, $\vec{a} \times (\lambda \vec{b})$, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ имеет длину, равную $|\lambda| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, сонаправлен с вектором $\vec{a} \times \vec{b}$ при $\lambda > 0$ и противоположно направлен с вектором $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\lambda < 0$. Следовательно, $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

(iii) Докажем справедливость для любых векторов первого равенства

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}). \quad (1.7.2)$$

Второе равенство, очевидно, следует из первого, если воспользоваться уже доказанной антикоммутативностью векторного произведения.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то доказываемое равенство справедливо, поскольку в обеих его частях стоят нулевые векторы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Нормируем вектор \vec{a} , т. е. рассмотрим вектор $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Выше было отмечено (см. равенство (1.7.1)), что для любых векторов \vec{a} и \vec{b} верно равенство

$$\vec{a}_0 \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}_0 \times \vec{b}) + (\vec{a}_0 \times \vec{c}).$$

Для завершения доказательства умножим левую и правую части последнего равенства на число $\lambda = |\vec{a}|$ и воспользуемся уже доказанным свойством (ii).

Свойство (iv) следует непосредственно из определения векторного произведения. ►

Найдем выражение векторного произведения через координаты векторов. Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в некотором правом ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пользуясь билинейностью векторного произведения, получим

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Произведения базисных векторов вычисляем по определению векторного произведения

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}; \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.\end{aligned}$$

Заполним таблицу умножения (векторного) базисных векторов.

	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	$\vec{0}$	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Возвращаясь к (1.7.3), получим

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Итак, справедлива следующая формула для вычисления векторного произведения векторов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (1.7.4)$$

Поскольку два вектора \vec{a} и \vec{b} всегда компланарны, то их можно считать векторами некоторой плоскости π , т. е. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}(\pi)$. В таком случае векторы можно задать координатами в ортонормированном базисе (\vec{i}, \vec{j}) множества $\mathbf{V}(\pi)$: $\vec{a}(x_1, y_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2)$. Определив вектор $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$, получим, очевидно, правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ множества векторов пространства \mathbf{E}^3 . Поскольку

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + 0 \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + 0 \vec{k},$$

то в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ векторы \vec{a} и \vec{b} будут иметь следующие координаты: $\vec{a}(x_1, y_1, 0)$, $\vec{b}(x_2, y_2, 0)$. Согласно (1.7.4), их векторное произведение равно

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}.$$

Из полученной формулы вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1.7.2. Пусть векторы плоскости $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе. Тогда

(i) \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$.

(ii) Если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , равна $|x_1 y_2 - y_1 x_2|$.

Операцию векторного произведения векторов можно рассматривать как отображение

$$\mathbf{V}(\mathbf{E}^3) \times \mathbf{V}(\mathbf{E}^3) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^3), (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b},$$

т. е. как бинарную алгебраическую операцию (см. [9], § 1.9) в множестве всех векторов. Ранее отмечалось, что эта операция билинейна и антикоммутативна (утверждение 1.7.1). Отметим, что векторное произведение (в отличие от операции сложения векторов) не ассоциативно, т. е. существуют векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, для которых равенство $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ неверно. Например, для векторов правого ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ имеем $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = -\vec{i}$, однако $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{0}$. Тем не менее для векторного произведения свойство ассоциативности имеет альтернативу.

Утверждение 1.7.3. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ верно следующее равенство, которое называется **тождеством Якоби**:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}. \quad (1.7.5)$$

Доказательство. Очевидно, что для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в пространстве можно выбрать такой правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, в котором векторы будут иметь следующие координаты: $\vec{a}(x_1, 0, 0)$, $\vec{b}(x_2, y_2, 0)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$. Тогда, применяя несколько раз формулу (1.7.4), получим

$$\begin{aligned} &(\vec{a} \times \vec{b})(0, 0, x_1 y_2), \quad (\vec{c} \times \vec{a})(0, x_1 z_3, -x_1 y_3), \quad (\vec{b} \times \vec{c})(y_2 z_3, -x_2 z_3, x_2 y_3 - y_2 x_3), \\ &(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))(0, -x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3, -x_1 x_2 z_3), \quad (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}))(-x_1 y_2 y_3, x_1 x_2 y_3, x_1 x_2 z_3), \\ &(\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}))(x_1 y_2 y_3, -x_1 y_2 x_3, 0). \end{aligned}$$

Легко проверить (складывая координаты), что сумма последних трех векторов равна $\vec{0}$. ►

§ 1.8. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1.8.1. Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – упорядоченная тройка произвольных векторов. **Смешанным произведением** тройки векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется число $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$. Смешанное произведение обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарные векторы. Отложив их от некоторой точки A , получим точки B, D, A_1 соответственно, не лежащие в одной плоскости с точкой A . Следовательно, отрезки AB, AD, AA_1 можно считать тремя ребрами параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, выходящими из одной вершины A (рис. 1.8.1).

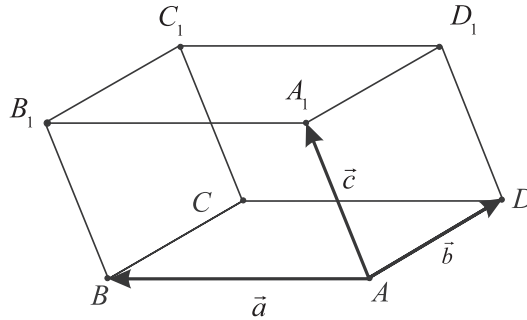


Рис. 1.8.1

Этот параллелепипед будем называть *параллелепипедом, построенным на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$* . Обозначим V число, выражающее объем этого параллелепипеда. Введенное обозначение будем использовать в следующей теореме, выражающей геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 1.8.1. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарные векторы. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{cases} V, & \text{если тройка } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ правая;} \\ -V, & \text{если тройка } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ левая.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть Δ – прямая, проходящая через точку A перпендикулярно основанию $ABCD$ параллелепипеда, \vec{e} – единичный вектор прямой Δ , выбранный так, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e})$ – правая (рис. 1.8.2 и 1.8.3). Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}| \vec{e} = S_{ABCD} \cdot \vec{e} \quad \text{и} \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = S_{ABCD} |\vec{c}| \cos \varphi,$$

где φ – величина угла между векторами \vec{c} и \vec{e} .

Если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, как и $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e})$, правая, то векторы \vec{e} и \vec{c} лежат в одном полупространстве относительно плоскости основания $ABCD$ и $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 1.8.2). В этом случае $|\vec{c}| \cos \varphi = h$ – длина высоты параллелепипеда, проведенной к основанию $ABCD$, и, следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = S_{ABCD} h = V$.

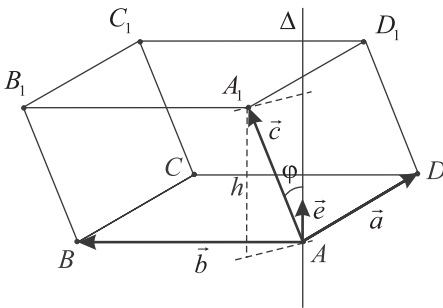


Рис. 1.8.2

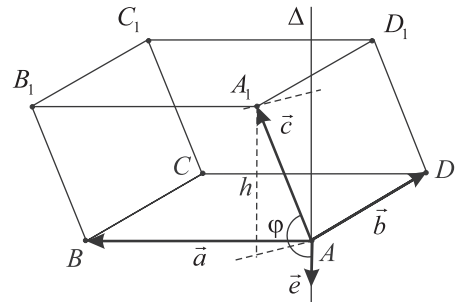


Рис. 1.8.3

Если же тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, – левая, то векторы \vec{e} и \vec{c} лежат в различных полупространствах относительно плоскости основания $ABCD$ и $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ (рис. 1.8.3). В этом случае $|\vec{c}| \cos \varphi = -h$ и, следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = S_{ABCD} |\vec{c}| \cos \varphi = -S_{ABCD} h = -V$. ►

Следствие 1.8.1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Другими словами, равенство нулю смешанного произведения трех векторов – критерий их компланарности.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Если \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и, следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Если же \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$, поэтому $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Допустим, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны. Тогда на этих векторах можно построить параллелепипед, объем которого равен V . По теореме 1.8.1 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V \neq 0$. Получили противоречие с условием достаточности. Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. ►

Следствие 1.8.2. Для любых трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ верны равенства

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Доказательство. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то, согласно следствию 1.8.1, все шесть рассматриваемых чисел равны нулю. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, то на этих векторах можно построить параллелепипед, объем которого равен V , и, согласно теореме 1.8.1, все шесть рассматриваемых чисел по абсолютной величине равны V . Знаки этих чисел зависят от ориентации соответствующей тройки. В § 1.4 отмечалось, что упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ имеют одинаковую ориентацию, а тройки $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$, $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$ – противоположную. Следовательно, числа $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$, $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$ равны и противоположны числам $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{c}\vec{b}\vec{a}$. ►

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ заданы своими координатами в некотором правом ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда, согласно формуле (1.7.4), вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ имеет координаты

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Следовательно,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Поскольку, согласно следствию 1.8.2, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$, то окончательно получаем формулу для вычисления смешанного произведения векторов по их координатам

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (1.8.1)$$

Согласно следствию 1.8.1, критерием компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является равенство нулю определителя (1.8.1), составленного из координат векторов в ортонормированном базисе. В § 1.9 будет показано, что это же верно для произвольного базиса (утверждение 1.9.2).

§ 1.9. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ВЕКТОРОВ

В этом параграфе мы получим формулы, связывающие координаты векторов при переходе от одного базиса к другому. Вид формул и их вывод одинаков для прямой, плоскости и пространства. Проведем рассуждения для случая плоскости.

Пусть (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) – два базиса множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ векторов плоскости. Первый из них будем условно называть *старым*, а второй – *новым*. Разложим каждый из векторов нового базиса по старому базису:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = s_{11}\vec{e}_1 + s_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 = s_{12}\vec{e}_1 + s_{22}\vec{e}_2, \end{cases} \quad s_{ij} \in \mathbf{R}. \quad (1.9.1)$$

Матрица $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$, составленная из координат новых базисных векторов

\vec{e}'_1, \vec{e}'_2 в старом базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , называется **матрицей перехода** от базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) к базису (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Обращаем внимание читателя, что в матрице перехода в столбцах стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе. По такому же правилу строится матрица перехода в случае пространства \mathbf{E}^3 . Перепишем формулы (1.9.1) в матричном виде:

$$(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \text{ или кратко } [\vec{e}'] = [\vec{e}]S. \quad (1.9.1')$$

Рассмотрим наряду с матрицей S матрицу $T = (t_{ij})$, $i, j \in \{1, 2\}$, перехода от базиса (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) к базису (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Тогда

$$[\vec{e}] = [\vec{e}']T. \quad (1.9.2)$$

Подставляя в последнее равенство выражение $[\vec{e}']$ из (1.9.1'), получаем $[\vec{e}] = [\vec{e}']T = ([\vec{e}]S)T = [\vec{e}](ST)$, откуда следует, что $ST = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, матрицы S и T являются взаимно обратными друг для друга. В частности, матрица перехода S – невырожденная, т. е. $\det S \neq 0$.

Пусть $(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $(x') = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ – координатные столбцы произвольного вектора

$\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ соответственно в старом и новом базисах, т. е. $\vec{a} = [\vec{e}](x) = [\vec{e}'](x')$. Тогда, с учетом (1.9.1'), имеем

$$[\vec{e}](x) = ([\vec{e}]S)(x') = [\vec{e}](S(x')).$$

Заметим, что в последнем равенстве мы пользовались ассоциативностью умножения матриц. Так как координаты вектора в данном базисе определяются однозначно, получим

$$(x) = S(x'). \quad (1.9.3)$$

Последнее матричное равенство перепишем поэлементно

$$\begin{cases} x = s_{11}x' + s_{12}y', \\ y = s_{21}x' + s_{22}y'. \end{cases} \quad (1.9.3')$$

Равенства (1.9.3) (или (1.9.3')) называются **формулами преобразования координат векторов** при переходе от одного базиса к другому, они выражают старые координаты через новые с помощью матрицы перехода. Эти формулы допускают обращение: если поменять ролями базисы (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) , то получим

$$(x') = T(x) \text{ или } \begin{cases} x' = t_{11}x + t_{12}y, \\ y' = t_{21}x + t_{22}y. \end{cases} \quad (1.9.4)$$

Аналоги формул (1.9.3') преобразования координат векторов для случаев прямой и пространства соответственно имеют вид

$$x = s_{11}x' \text{ и } \begin{cases} x = s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + s_{23}z', \\ z = s_{31}x' + s_{32}y' + s_{33}z'. \end{cases}$$

Здесь, как и выше, переменные без штрихов – координаты произвольного вектора в старом базисе, переменные со штрихами – координаты этого же вектора в новом базисе, $S = (s_{ij})$ – матрица перехода от старого базиса к новому. Во всех трех рассматриваемых случаях (прямая, плоскость, пространство) матричная запись формул преобразования координат векторов одинакова: $(x) = S(x')$.

Утверждение 1.9.1 (критерий компланарности векторов). Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ заданы своими координатами в некотором базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. В конце § 1.8 было отмечено, что доказываемое утверждение

верно в случае ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пусть $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ к базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда, обозначив координаты

векторов в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ теми же переменными, но со штрихами, и записав формулы преобразования координат для каждого вектора, получим

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Три последних равенства можно записать в следующей матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix}$$

или, обозначая каждую матрицу одной буквой, в виде $X = S \cdot X'$. Переходя к определителям, получим $\det X = \det S \cdot \det X'$. Поскольку матрица S невырождена, т. е. $\det S \neq 0$, то определители $\det X$ и $\det X'$ либо оба равны нулю, либо оба не равны нулю. Интересующий нас определитель есть определитель матрицы X^t , транспонированной к матрице X . Поскольку при транспонировании определители матриц не изменяются, то получим окончательно

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

\Leftrightarrow векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. ►

В последней эквивалентности используется следствие 1.8.1.

Ранее отмечалось, что матрица перехода от одного базиса к другому невырождена. Следующее утверждение характеризует геометрический смысл знака определителя этой матрицы.

Утверждение 1.9.2. Два базиса (на прямой, на плоскости или в пространстве) одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда определитель матрицы перехода от одного из них к другому положителен.

Доказательство. Пусть \vec{e} и \vec{e}' – два базиса на прямой \mathbf{E}^1 . Матрица перехода от первого из них ко второму – это число s_{11} такое, что $\vec{e}' = s_{11}\vec{e}$. По определению операции умножения вектора на число положительность s_{11} означает, что векторы \vec{e} и \vec{e}' одинаково направлены, т. е. одинаково ориентированы.

Пусть (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) – два базиса на плоскости \mathbf{E}^2 , $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от первого из них ко второму, т. е.

$$\vec{e}'_1 = s_{11}\vec{e}_1 + s_{21}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = s_{12}\vec{e}_1 + s_{22}\vec{e}_2.$$

Используя последние разложения, найдем связь между векторными произведениями $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ и $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2 &= (s_{11}\vec{e}_1 + s_{21}\vec{e}_2) \times (s_{21}\vec{e}_1 + s_{22}\vec{e}_2) = \\
&= s_{11}s_{12}(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + s_{11}s_{22}(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + s_{21}s_{12}(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + s_{21}s_{22}(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) = \\
&= (s_{11}s_{22} - s_{21}s_{12})(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2).
\end{aligned}$$

Мы видим, что векторы $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ и $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2$ коллинеарны, причем они одинаково направлены тогда и только тогда, когда число $s_{11}s_{22} - s_{21}s_{12} = \det S$ положительно. Сонаправленность векторов $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ и $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2$ означает, что при вложении плоскости \mathbf{E}^2 в пространство \mathbf{E}^3 и откладывании векторов $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ и $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2$ от некоторой точки плоскости \mathbf{E}^2 мы получаем точки, лежащие в одном и том же полупространстве относительно плоскости \mathbf{E}^2 . Следовательно, глядя из одного полупространства на плоскость \mathbf{E}^2 , кратчайшие повороты первых базисных векторов до вторых в обоих базисах мы видим происходящими в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. Это и означает одинаковую ориентированность базисов (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) .

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ – два базиса в пространстве \mathbf{E}^3 , $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ –

матрица перехода от первого из них ко второму, т. е.

$$\vec{e}'_1 = s_{11}\vec{e}_1 + s_{21}\vec{e}_2 + s_{31}\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_2 = s_{12}\vec{e}_1 + s_{22}\vec{e}_2 + s_{32}\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = s_{13}\vec{e}_1 + s_{23}\vec{e}_2 + s_{33}\vec{e}_3.$$

Используя последние разложения и свойства смешанного произведения, можно получить связь между смешанными произведениями $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$. Оставляя вычисления в качестве упражнения, приведем окончательный результат: $\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3 = \det S \cdot (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$. Согласно теореме 1.6.1, смешанное произведение положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда тройка векторов правая (левая). Следовательно, базисы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда $\det S > 0$. ►

§ 2.1. АФФИННЫЕ РЕПЕРЫ И КООРДИНАТЫ ТОЧЕК. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК

Аффинные реперы являются обобщением известных из программы средней школы систем координат на плоскости и в пространстве. Чтобы задать аффинный репер на прямой, на плоскости или в пространстве, надо зафиксировать точку и выбрать базис соответствующего множества векторов.

Определение 2.1.1. *Аффинным репером на прямой E^1 называется набор (O, \vec{e}_1) , где O – точка, \vec{e}_1 – базис множества $V(E^1)$ векторов прямой, т. е. ненулевой вектор прямой (рис. 2.1.1). Координатой точки $M \in E^1$ в репере (O, \vec{e}_1) называется координата радиус-вектора \overrightarrow{OM} в базисе \vec{e}_1 .*

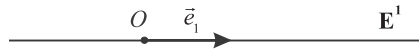


Рис. 2.1.1

Таким образом, координата точки M в репере (O, \vec{e}_1) – это число $x \in \mathbf{R}$, которое определяется равенством $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1$. Координата для каждой точки определяется однозначно, так как отображение $M \mapsto \overrightarrow{OM}$, ставящее в соответствие точке ее радиус-вектор, есть биекция множества точек прямой E^1 на множество векторов $V(E^1)$ этой прямой, а координата вектора в данном базисе определяется однозначно (см. теорему 1.5.1). Если считать, что масштаб на прямой определяется вектором \vec{e}_1 (т. е. $|\vec{e}_1| = 1$), то координата точки на прямой имеет тот же смысл, что и в средней школе, т. е. с точностью до знака совпадает с расстоянием от этой точки до начала координат. Прямую с фиксированным репером (O, \vec{e}_1) будем называть **координатной осью** и обозначать Ox . Если x – координата точки M , то используют запись $M(x)$.

Определение 2.1.2. *Аффинным репером на плоскости E^2 называется набор $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, где O – точка плоскости, (\vec{e}_1, \vec{e}_2) – базис множества $V(E^2)$ векторов плоскости, т. е. упорядоченная пара неколлинеарных векторов плоскости (рис. 2.1.2).*

Координатами точки $M \in E^2$ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ называются координаты **радиус-вектора** \overline{OM} точки M в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Таким образом, координаты точки M в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – это пара чисел (x, y) , $x, y \in \mathbf{R}$ таких, что $\overline{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Если (x, y) – координаты точки M , то используют запись $M(x, y)$. Те же аргументы, что и в случае прямой, показывают, что координаты точки в данном репере определяются однозначно. Имея репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ на плоскости, можно говорить о двух координатных осях. Координатная ось с репером (O, \vec{e}_1) называется **осью абсцисс** и обозначается Ox , координатная ось с репером (O, \vec{e}_2) – **осью ординат** и обозначается Oy . Первая x и вторая y координаты точки называются **абсциссой** и **ординатой** этой точки соответственно. Способ определения координат векторов, изложенный в § 1.4, позволяет выяснить геометрический смысл координат. Для нахождения абсциссы x точки M нужно спроектировать ее на ось Ox параллельно оси Oy . Если $M_1 = \text{pr}_{Ox} M$, то x – координата точки M_1 на оси абсцисс. Аналогично y – координата точки $M_2 = \text{pr}_{Oy} M$ на оси ординат (рис. 2.1.3).

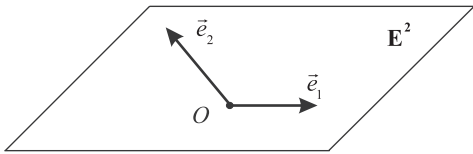


Рис. 2.1.2

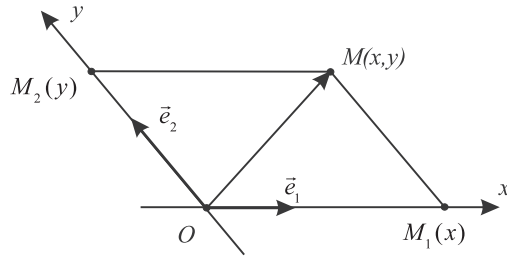


Рис. 2.1.3

Определение 2.1.3. Аффинным репером в пространстве E^3 называется набор $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где O – точка, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис множества $\mathbf{V}(E^3)$ векторов пространства, т. е. упорядоченная тройка некопланарных векторов (рис. 2.1.4). **Координатами точки** $M \in E^3$ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называются координаты **радиус-вектора** \overline{OM} точки M в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

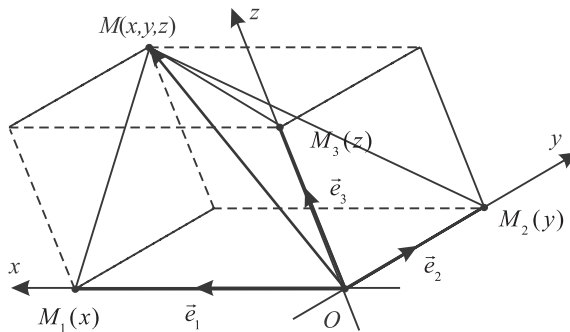


Рис. 2.1.4

Таким образом, координаты точки M в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – это тройка чисел (x, y, z) , $x, y, z \in \mathbf{R}$ таких, что $\overline{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Если (x, y, z) – координаты точки M , то используют запись $M(x, y, z)$. Далее можно повторить все то, что говорилось выше в случае плоскости с очевидными дополнениями. Помимо координатных осей абсцисс Ox и ординат Oy в пространстве добавляется **ось аппликата** Oz . Кроме того, в пространстве имеются три **координатные плоскости**, определяемые парами осей: это плоскости Oxy , Oxz и Oyz . Каждая из координат x, y, z точки M есть координата проекции точки M на соответствующую ось параллельно дополнительной координатной плоскости (см. рис. 2.1.4). Координаты точки в данном репере определяются однозначно.

Аффинные реперы называются также **аффинными** (или **декартовыми**) **системами координат** и обозначаются: Ox (для прямой), Oxy (для плоскости), $Oxyz$ (для пространства). Точка O , входящая в репер, называется **началом системы координат**. В случаях, когда (\vec{i}, \vec{j}) или $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – ортонормированные базисы (см. определение 1.4.5), говорят об **ортонормированном репере** плоскости (O, \vec{i}, \vec{j}) (рис. 2.1.5) и **ортонормированном репере** пространства $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (рис. 2.1.6). Ортонормированные реперы называются также **декартовыми прямоугольными системами координат**.

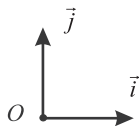


Рис. 2.1.5

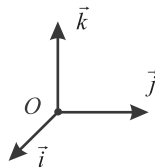


Рис. 2.1.6

Подводя итог сказанному выше, заметим, что *положение точки в пространстве (на плоскости или на прямой) однозначно определяется ее координатами в заданном репере*.

Замечание 2.1.1. Отметим две биекции, возникающие при координатизации прямой, плоскости или пространства. Пусть, например, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер на плоскости \mathbf{E}^2 . Тогда отображение $\varphi_O : M \mapsto \overline{OM}$, ставящее в соответствие каждой точке плоскости ее радиус-вектор, является биекцией множества точек плоскости \mathbf{E}^2 на множество $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ векторов плоскости. А отображение $\varphi_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)} : M \mapsto (x, y)$, ставящее в соответствие каждой точке плоскости ее координаты – биекция множества точек плоскости \mathbf{E}^2 на множество \mathbf{R}^2 пар вещественных чисел. Аналогично в случаях прямой и пространства биекциями являются отображения

$$\varphi_O : \mathbf{E}^1 \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^1), M \mapsto \overline{OM}; \quad \varphi_O : \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^3), M \mapsto \overline{OM},$$

а также отображения

$$\varphi_{(O, \vec{e}_1)} : \mathbf{E}^1 \rightarrow \mathbf{R}, M(x) \mapsto x; \quad \varphi_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} : \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, M(x, y, z) \mapsto (x, y, z).$$

Утверждение 2.1.1. (i) Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер на плоскости E^2 , $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ – произвольные точки плоскости, заданные своими координатами в данном репере. Тогда:

(i) вектор \overline{AB} в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) имеет следующие координаты: $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$;

(ii) середина C отрезка AB имеет следующие координаты: $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$;

(iii) если (O, \vec{i}, \vec{j}) – ортонормированный репер, то расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.1.1)$$

Доказательство. (i) По определению 2.1.2 координаты точек A и B совпадают с координатами векторов \overline{OB} и \overline{OA} . Поскольку $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, то, согласно утверждению 1.5.6, каждая координата вектора есть разность соответствующих координат векторов \overline{OB} и \overline{OA} .

(ii) Пусть (x_0, y_0) – координаты точки C . Так как $\overline{AC} = \overline{CB}$, то, согласно части (i), для x_0, y_0 имеем уравнения: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$, $y_0 - y_1 = y_2 - y_0$, решая которые, получаем нужный результат.

(iii) Поскольку расстояние между точками A и B совпадает с длиной вектора \overline{AB} , то формула (2.1.1) вытекает из первой формулы (1.6.4). ►

Разумеется, утверждение 2.1.1, относящееся к плоскости, имеет очевидные аналоги для прямой и пространства.

Далее, подобно тому, как это было сделано для векторов в § 1.9, получим формулы преобразования координат точек при переходе от одного репера к другому. Как и в случае векторов, вид формул и их вывод одинаковы для прямой, плоскости и пространства. Проведем рассуждения для случая плоскости.

Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ – два аффинных репера на плоскости E^2 . Первый из них будем условно называть *старым*, а второй – *новым*. Пусть (x, y) и (x', y') – соответственно старые и новые координаты произвольной точки M плоскости. Обозначим

$(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $(x') = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ соответствующие координатные столбцы. Нам понадобится

матрица перехода $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ от базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) к базису (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) и координаты (α_1, α_2) точки O' в старом репере. Обозначим $(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ координатный столбец точки O' . Запишем для точек O, O', M равенство треугольника:

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}. \quad (2.1.2)$$

Таким же равенством связаны координатные столбцы векторов в старом базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Координатные столбцы радиус-векторов \overline{OM} и $\overline{OO'}$ совпадают с координатными столбцами точек, т. е. соответственно с (x) и (α) . Для вектора $\overline{O'M}$ нам также известен координатный столбец (x') , но только в новом базисе (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) .

По формуле (1.9.3) преобразования координат векторов находим координатный столбец вектора $\overline{O'M}$ в старом базисе: $S(x')$. Таким образом, $(x) = (\alpha) + S(x')$ – координатный аналог равенства (2.1.2). Окончательно получим следующие **формулы преобразования координат точек** при переходе от одного репера к другому:

$$(x) = S(x') + (\alpha), \quad (2.1.3)$$

в развернутом виде для прямой, плоскости и пространства соответственно:

$$x = s_{11}x' + \alpha_1; \quad \begin{cases} x = s_{11}x' + s_{12}y' + \alpha_1, \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + \alpha_2; \\ z = s_{31}x' + s_{32}y' + s_{33}z' + \alpha_3. \end{cases} \quad (2.1.3')$$

Здесь старые координаты (x) произвольной точки выражены через ее новые координаты (x') с помощью матрицы перехода $S = (s_{ij})$ и координат (α) нового начала координат в старом репере.

Рассмотрим подробнее формулы преобразования прямоугольных координат на плоскости. Пусть (O, \vec{i}, \vec{j}) и (O', \vec{i}', \vec{j}') – два ортонормированных репера на плоскости E^2 . Повернем вектор \vec{i} вокруг точки O до совмещения с вектором \vec{i}' , обозначим φ величину угла поворота. Считаем при этом, что $\varphi \geq 0$, если направление поворота совпадает с направлением кратчайшего поворота (на 90°) вектора \vec{i} до вектора \vec{j} , и $\varphi < 0$, если эти направления противоположны. Легко видеть, что $\vec{i}' = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$. Аналогично, если ψ – величина угла поворота вектора \vec{i} вокруг точки O до совмещения с вектором \vec{j}' , то $\vec{j}' = \vec{i} \cos \psi + \vec{j} \sin \psi$. Числа φ и ψ связаны между собой. Если базисы (\vec{i}, \vec{j}) и (\vec{i}', \vec{j}') одинаково ориентированы, то $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.1.7), если же базисы (\vec{i}, \vec{j}) и (\vec{i}', \vec{j}') имеют противоположную ориентацию, то $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.1.8).

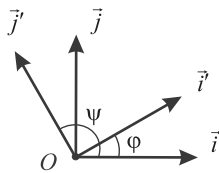


Рис. 2.1.7

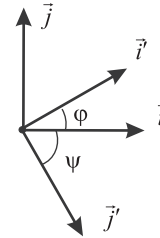


Рис. 2.1.8

Следовательно, $\vec{j}' = \vec{i}(-\sin \varphi) + \vec{j} \cos \varphi$ в первом случае и $\vec{j}' = \vec{i} \sin \varphi + \vec{j}(-\cos \varphi)$ – во втором. Таким образом, формулы преобразования координат точек на плоскости при переходе от прямоугольной системы координат (O, \vec{i}, \vec{j}) к прямоугольной системе координат (O', \vec{i}', \vec{j}') имеют вид

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + \alpha_1, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + \alpha_2, \end{cases} \text{ если } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ и } (\vec{i}', \vec{j}') \text{ одинаково ориентированы, либо}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi + \alpha_1, \\ y = x' \sin \varphi - y' \cos \varphi + \alpha_2, \end{cases} \text{ если } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ и } (\vec{i}', \vec{j}') \text{ противоположно ориентированы.}$$

В частности,

$$\begin{cases} x = x' + \alpha_1, \\ y = y' + \alpha_2 \end{cases} \text{ – формулы преобразования координат при параллельном переносе}$$

се системы координат на вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, а

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \text{ – формулы преобразования координат при повороте прямоу-}$$

моугольной системы координат вокруг точки O на угол φ .

§ 2.2. ФИГУРЫ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Напомним, что **фигурой** мы называем произвольное множество точек Φ в пространстве, на плоскости или на прямой. Аналитическая геометрия изучает фигуры, используя **метод координат**. Его суть заключается в том, что, фиксируя некоторую систему координат, точки заменяют их координатами и задают фигуру как множество решений уравнения (системы уравнений) или неравенства (системы неравенств). Далее уравнения или неравенства анализируют методами алгебры и результаты анализа интерпретируют геометрически как свойства фигуры. Задание фигур с помощью уравнений или неравенств используют и в средней школе. Известно, например, что уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ задает в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости окружность $S(O, a)$ с центром в точке O и радиусом $a > 0$, а неравенство $|x| < 1$ задает на координатной оси Ox открытый интервал $(-1; 1)$.

Далее речь пойдет о фигурах на плоскости E^2 и способах их задания. Читателю рекомендуется в качестве упражнения сформулировать соответствующие определения и утверждения для фигур на прямой и в пространстве.

Определение 2.2.1. Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер на плоскости E^2 , $F: D \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ – вещественнозначная функция двух аргументов, заданная на подмножестве D множества \mathbf{R}^2 . Будем говорить, что уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{2.2.1}$$

есть **уравнение фигуры** $\Phi \subset E^2$ в данном репере, если множество решений уравнения (2.2.1) совпадает с множеством координат точек фигуры Φ .

Другими словами, уравнение (2.2.1) является уравнением фигуры Φ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, если эта фигура может быть определена следующим образом:

$$\Phi = \{M(c_1, c_2) \in E^2 \mid F(c_1, c_2) \equiv 0\}.$$

Если Φ имеет уравнение (2.2.1), то говорят также, что фигура Φ **задана** этим уравнением.

Для нахождения уравнения фигуры в данном репере следует для произвольной точки плоскости $M(x, y)$ через ее координаты x и y записать характеристическое свойство этой фигуры, т. е. условие, которому удовлетворяют точки фигуры и только они. Например, для окружности $S(O, a)$ таким свойством является условие: **расстояние от точки $M(x, y)$ до центра окружности O равно a** . В прямоугольных координатах это условие записывается следующим образом: $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ или $x^2 + y^2 = a^2$.

Зная уравнение (2.2.1) фигуры Φ в данном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, можно найти уравнение этой фигуры в любом другом репере $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$. Для этого воспользуемся формулами преобразования координат (2.1.3) из § 2.1:

$$\begin{cases} x = s_{11}x' + s_{12}y' + \alpha_1, \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + \alpha_2. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение (1) выражения x и y , получим искомое уравнение

$$F(s_{11}x' + s_{12}y' + \alpha_1, s_{21}x' + s_{22}y' + \alpha_2) = 0.$$

Отметим также следующий очевидный факт. Если $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ – уравнения фигур Φ_1 и Φ_2 соответственно в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то пересечение $\Phi_1 \cap \Phi_2$ задается в данном репере системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Наряду с заданием фигур с помощью уравнений используется также *параметрическое* задание фигур.

Определение 2.2.2. Пусть Φ – фигура на плоскости \mathbf{E}^2 , T – некоторое множество, элементы которого будем называть **параметрами**. Сюръективное отображение

$$f: T \rightarrow \Phi, t \mapsto f(t) \quad (2.2.2)$$

называется **параметризацией** фигуры Φ .

Например, пусть Oxy – прямоугольная система координат на плоскости \mathbf{E}^2 . Рассмотрим отображение $f: t \mapsto M(t)$, ставящее в соответствие числу $t \in [0; 2\pi]$ точку $M(t)$ на плоскости, находящуюся на расстоянии $a > 0$ от точки O , и такую, что величина угла поворота вектора \vec{i} до вектора \overrightarrow{OM} равна t . Очевидно, что f – параметризация окружности $S(O, a)$ (рис. 2.2.1).

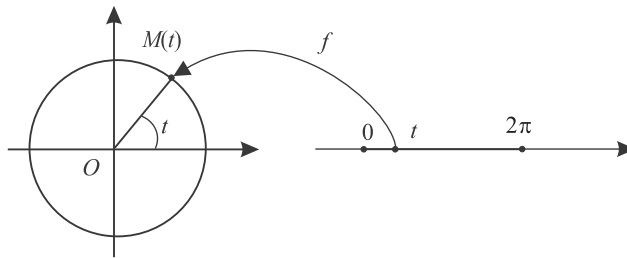


Рис. 2.2.1

При параметрическом задании каждому значению $t_0 \in T$ параметра t отвечает точка $f(t_0)$ фигуры Φ . Параметризацию можно рассматривать как математическое обобщение физической ситуации, когда траектория движения точки (фигура Φ) описывается в зависимости от времени (параметра t).

В аналитической геометрии часто встречаются две вариации параметризации, а именно, векторно-параметрическое и координатно-параметрическое задание фигур. Первая из них возникает, если зафиксировать точку $O \in \mathbf{E}^2$ и, используя

биекцию φ_O (см. замечание 2.1.1), множество Φ точек фигуры заменить множеством $\vec{\Phi} = \varphi_O(\Phi)$ их радиус-векторов.

Определение 2.2.3. *Векторно-параметрическим заданием фигуры Φ называется сюръективное отображение*

$$\vec{f} : T \rightarrow \vec{\Phi}, t \mapsto \vec{f}(t). \quad (2.2.3)$$

Понятно, что биекция φ_O позволяет переходить от отображения (2.2.3) к отображению (2.2.2) и наоборот.

Пусть теперь $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер на плоскости \mathbf{E}^2 и $\tilde{\Phi} = \varphi_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\Phi)$ – множество координат точек фигуры Φ (см. замечание 2.1.1).

Определение 2.1.4. *Координатно-параметрическим заданием фигуры Φ называется сюръективное отображение*

$$\tilde{f} : T \rightarrow \tilde{\Phi}, t \mapsto \tilde{f}(t). \quad (2.2.4)$$

И вновь, используя биекцию $\varphi_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)}$, можно переходить от отображения (2.2.4) к отображению (2.2.2) и наоборот.

Для упоминавшейся выше окружности $S(O, a)$ укажем векторно-параметрическое задание

$$\vec{f} : [0; 2\pi] \rightarrow S(O, r), t \mapsto \overline{OM(t)}$$

и координатно-параметрическое задание

$$\tilde{f} : [0; 2\pi] \rightarrow S(O, r), t \mapsto (a \cos t, a \sin t).$$

В математике наряду с декартовыми используют и другие системы координат. Чаще всего встречаются *полярная система координат* на плоскости и *сферическая система координат* в пространстве.

Для задания **полярной системы координат** надо зафиксировать на плоскости \mathbf{E}^2 точку O , называемую **полюсом**, выбрать луч OA с вершиной в точке O , который называется **полярным лучом**, и одно из двух возможных направлений вращения на плоскости вокруг точки O , которое считается положительным (рис. 2.2.2).

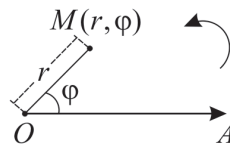


Рис. 2.2.2

Если M – произвольная точка плоскости, отличная от полюса, то **полярные координаты** этой точки – это пара чисел (r, φ) , которые называются соответственно **полярным радиусом** и **полярным углом** точки M . Здесь $r = |OM|$ – расстояние от точки M до полюса, а φ – величина угла, на который надо повернуть полярный луч вокруг полюса для того, чтобы он совместился с отрезком OM . При этом величины углов поворотов в положительном направлении считаются положительными, а в противоположном направлении – отрицательными. Число r для точки M определяется однозначно, а φ – с точностью до целых, кратных 2π . Для полюса O полярный радиус r равен 0, полярный угол φ не определен. Если наряду с поляр-

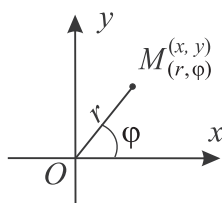


Рис. 2.2.3

ной системой координат на плоскости рассмотреть согласованную с ней декартову прямоугольную систему координат (начало декартовой системы координат совпадает с полюсом; положительный луч оси Ox совпадает с полярным лучом; при повороте на 90° в положительном направлении полярный луч совпадает с положительным лучом оси Oy (рис. 2.2.3)), то полярные (r, φ) и декартовы (x, y) координаты одной и той же точки связаны между собой формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Некоторые фигуры на плоскости удобно задавать уравнениями в полярной системе координат, например, полярное уравнение окружности $S(O, a)$ имеет вид $r = a$.

Для задания **сферической системы координат** надо зафиксировать в пространстве E^3 плоскость π , на ней выбрать полярную систему координат, т. е. точку O , луч OA с вершиной в точке O и одно из двух возможных направлений вращения на плоскости π вокруг точки O , которое считается положительным. Кроме того, следует выбрать одно из двух полупространств, определяемых плоскостью π , которое считается положительным, другое подпространство считается отрицательным. Обозначим Δ прямую, проходящую через точку O перпендикулярно плоскости π (рис. 2.2.4, а).

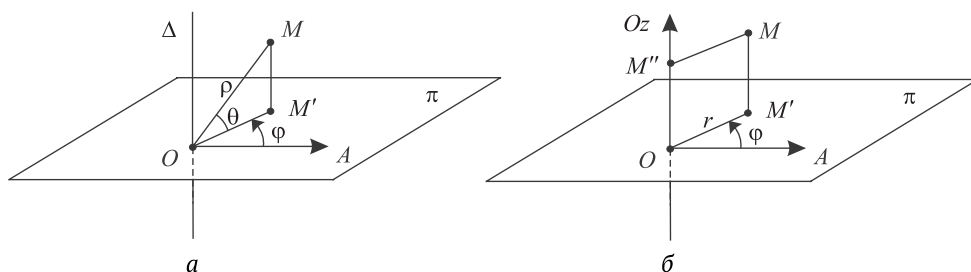


Рис. 2.2.4

Пусть M – произвольная точка пространства, не лежащая на прямой Δ , M' – ортогональная проекция точки M на плоскость π . **Сферические координаты** точки M – это тройка чисел (ρ, φ, θ) , которые определяются следующим образом. Число $\rho = |OM|$ – расстояние от точки M до точки O , число φ – величина угла, на который надо повернуть луч OA в плоскости π вокруг точки O для того, чтобы он совпал с отрезком OM' . При этом величины углов поворотов в положительном направлении считаются положительными, а в противоположном направлении – отрицательными. Число θ по модулю равно величине угла между векторами OM и $\overrightarrow{OM'}$, $0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. Если $\theta \neq 0$, т. е. точка M не лежит в плоскости π , то θ положительно для точек M положительного полупространства и отрицательно для точек M отрицательного полупространства. Для указанной точки M числа ρ и θ определяются однозначно, число φ – с точностью до целых кратных 2π .

Если точка M лежит на прямой Δ и не совпадает с точкой O , то для нее число φ не определяется, а числа ρ и θ определяются следующим образом: $\rho = |OM|$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ для точек положительного полупространства, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ для точек отрицательного полупространства. Для точки O число ρ считается равным 0, числа φ и θ не определены.

Обычно наряду со сферической системой координат в пространстве рассматривают согласованную с ней декартову прямоугольную систему координат $Oxuz$. Согласованность систем координат означает, что начало декартовой системы координат совпадает с точкой O ; плоскость Oxu совпадает с плоскостью π ; положительный луч оси Ox совпадает с лучом OA ; при повороте на 90° в положительном направлении луч OA совпадает с положительным лучом оси Oy ; положительным полупространством считается полупространство, состоящее из точек с положительными аппликатами. В таком случае сферические и декартовы координаты одной и той же точки связаны между собой формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Сферические координаты иногда называют еще **географическими координатами**; в этом случае число φ называется **долготой** точки M , число θ – **широтой** точки M . Эти названия объясняются тем обстоятельством, что для точек земного шара географические долгота и широта определяются соответственно как φ и θ , если принять следующие соглашения: в качестве плоскости π взять плоскость экватора; считать, что точки северного полушария лежат в положительном полупространстве, точки южного полушария лежат в отрицательном полупространстве; отсчитывать угол φ от **гринвичского (нулевого)** меридиана.

В пространстве E^3 иногда используется также **цилиндрическая система координат** (рис. 2.2.4, б). Для ее задания надо зафиксировать в пространстве E^3 плоскость π , на ней выбрать полярную систему координат, т. е. точку O , луч OA с вершиной в точке O и одно из двух возможных направлений вращения на плоскости π вокруг точки O , которое считается положительным. Кроме того, на прямой Δ , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости π , следует выбрать аффинный репер (O, \vec{e}) , т. е. превратить прямую в координатную ось. Координаты точек на этой оси обычно обозначаются z , вектор \vec{e} выбирается так, чтобы, глядя с его конца, положительное направление вращения на плоскости мы видели происходящим противоположно направлению вращения часовой стрелки. Пусть M – произвольная точка пространства, не лежащая на оси Oz , M' – ортогональная проекция точки M на плоскость π , M'' – ортогональная проекция точки M на ось Oz . **Цилиндрические координаты** точки M – это тройка чисел (r, φ, z) , где (r, φ) – полярные координаты точки M' , z – координата точки M'' на оси Oz . Для точек оси Oz определяется только число z , числа r, φ не определены.

Обычно наряду с цилиндрической системой координат в пространстве рассматривают согласованную с ней декартову прямоугольную систему координат $Oxuz$. Согласованность систем координат означает, что начало декартовой системы координат совпадает с точкой O ; плоскость Oxu совпадает с плоскостью π ; положительный луч оси Ox совпадает с лучом OA ; при повороте на 90° в положительном

направлении луч OA совпадает с положительным лучом оси Oy , оси Oz в обеих системах координат совпадают. В таком случае цилиндрические и декартовы координаты одной и той же точки связаны между собой формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

§ 2.3. ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

В этом параграфе мы рассмотрим различные варианты задания прямых на плоскости и приведем формулы и утверждения, позволяющие решать основные задачи, связанные с прямыми на плоскости. Материал разобьем на несколько пунктов.

2.3.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Прямую на плоскости E^2 можно задавать различными способами. Например, на прямой Δ можно зафиксировать некоторую точку M_0 , которую будем называть **начальной точкой** прямой, и выбрать ненулевой вектор \vec{a} этой прямой, который будем называть **направляющим вектором** прямой. Тогда необходимое и достаточное условие того, что точка M лежит на прямой Δ , формулируется следующим образом:

$(M \in \Delta) \Leftrightarrow$ (векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{a} коллинеарны) (рис. 2.3.1).



Рис. 2.3.1

Пусть O – фиксированная точка плоскости, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ – радиус-вектор начальной точки M_0 , $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор произвольной точки (иногда говорят *текущей* точки) M плоскости. Коллинеарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{a} означает, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого $t \in \mathbf{R}$. Учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, имеем следующую цепочку эквивалентностей:

$$(M \in \Delta) \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}) \Leftrightarrow (\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}), t \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, мы получили **векторно-параметрическое задание** прямой Δ :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbf{R}. \quad (2.3.1)$$

По формуле (2.3.1) можно найти радиус-вектор \vec{r} любой точки прямой Δ в зависимости от значения параметра $t \in \mathbf{R}$ (рис. 2.3.2).

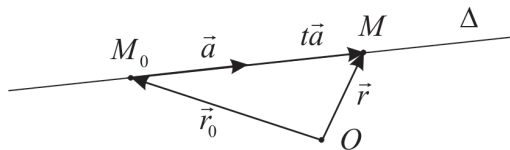


Рис. 2.3.2

Равенство (2.3.1) называют также (допуская вольность речи) **векторно-параметрическим уравнением** прямой Δ .

Присоединим к точке O базис (\vec{e}_1, \vec{e}_2) множества векторов плоскости $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$, получим аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ на плоскости \mathbf{E}^2 . Пусть (x, y) и (x_0, y_0) – координаты соответственно точек M и M_0 в данном репере. Согласно определению 2.1.2, (x, y) и (x_0, y_0) – координаты радиус-векторов \vec{r} и \vec{r}_0 соответственно в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Пусть (l, m) – координаты направляющего вектора прямой \vec{a} в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Тогда векторное равенство (2.3.1) равносильно двум скалярным равенствам

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Формулы (2.3.2) выражают координатно-параметрическое задание прямой, они называются также **координатно-параметрическими уравнениями** прямой Δ . Придавая параметру t подходящее числовое значение, по формулам (2.3.2) можно найти координаты (x, y) любой точки прямой Δ .

Если прямая Δ параллельна координатной оси Ox , то у направляющего вектора вторая координата m равна нулю и уравнения (2.3.2) принимают вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0, t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2.3.2')$$

Поскольку $l \neq 0$, то равенства (2.3.2') означают, что у точек прямой первая координата может быть любым вещественным числом, в то время как вторая – фиксирована. Следовательно, точка $M(x, y)$ лежит на прямой Δ , $\Delta \parallel Ox$ (рис. 2.3.3) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$y = y_0. \quad (2.3.3)$$

Аналогично прямая Δ' , проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельная координатной оси Oy (рис. 2.3.4), задается условием

$$x = x_0. \quad (2.3.4)$$

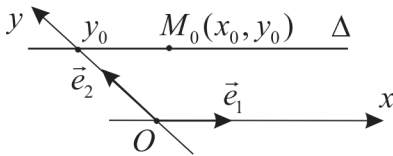


Рис. 2.3.3

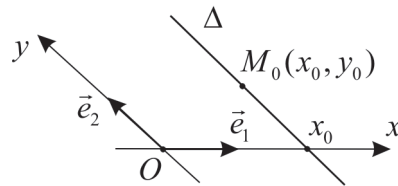


Рис. 2.3.4

Пусть прямая Δ не параллельна координатным осям Ox и Oy , т. е. $l \neq 0, m \neq 0$. В этом случае из системы (2.3.2) можно исключить t и получить следующее уравнение прямой Δ :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (2.3.5)$$

Если (2.3.5) рассматривать как пропорцию, т. е. считать, что равенство (2.3.5) эквивалентно равенству $(x - x_0)m = (y - y_0)l$, то уравнениями вида (2.3.5) можно задавать все прямые без исключения, т. е. можно задавать и прямые, парал-

тельные координатным осям. Например, уравнение $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{m}$ означает, что $(x-x_0)m = (y-y_0)0$, т. е. $x = x_0$ (поскольку $m \neq 0$). Таким образом, будем считать, что любая прямая может быть задана уравнением (2.3.5), которое называется **каноническим уравнением** прямой.

Если прямая Δ не параллельна координатной оси Oy , т. е. $l \neq 0$, то можно определить число $k = \frac{m}{l}$, которое называется **угловым коэффициентом** прямой. Название объясняется тем обстоятельством, что в случае прямоугольной системы координат Oxy на плоскости $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ – величина угла между осью Ox и прямой Δ (угла наклона прямой Δ к оси Ox) (рис. 2.3.5).

Разумеется, в случае общей декартовой системы координат число k не имеет такого геометрического смысла. Преобразовав уравнение (2.3.5), получаем следующее **уравнение прямой по точке $M_0(x_0, y_0)$ и угловому коэффициенту k** :

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.3.6)$$

В свою очередь, уравнение (2.3.6) очевидным образом приводится к виду

$$y = kx + b. \quad (2.3.7)$$

Число b здесь – величина отрезка, отсекаемого прямой Δ на оси Oy , т. е. координата (на оси Oy) точки пересечения прямой Δ с осью (рис. 2.3.6).

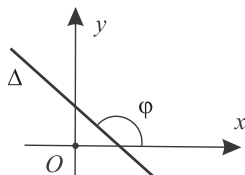


Рис. 2.3.5

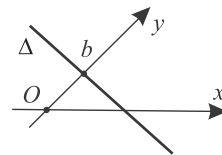


Рис. 2.3.6

Любую прямую Δ можно задать, указав две различные точки этой прямой $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. В таком случае $\vec{a} = \overline{M_1M_2}$ – направляющий вектор этой прямой с координатами $l = x_2 - x_1$ и $m = y_2 - y_1$. Согласно (2.3.2) и (2.3.5), мы можем записать **параметрические уравнения прямой по двум точкам**:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \end{cases} t \in \mathbf{R}, \quad (2.3.8)$$

а также **каноническое уравнение прямой по двум точкам**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.3.9)$$

Проведя несложные преобразования, уравнение (2.3.9) (или уравнение (2.3.5)) можно привести к виду $Ax + By + C = 0$, $A, B, C \in \mathbf{R}$, причем числа A и B не равны нулю одновременно. Это означает, что любая прямая на плоскости может быть задана линейным уравнением с двумя неизвестными. В следующей теореме мы зафиксируем этот факт и покажем, что верно и обратное.

Теорема 2.3.1. Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер на плоскости E^2 .

(i) Любая прямая на плоскости E^2 может быть задана в данном репере линейным уравнением вида

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.3.10)$$

(ii) Обратно, любое уравнение (2.3.10) при условии, что числа A и B не равны нулю одновременно, задает в данном репере прямую.

Доказательство. Истинность части (i) теоремы была отмечена перед ее формулировкой.

(ii) Пусть, для определенности, $B \neq 0$ в уравнении (2.3.10). Тогда

$$y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}x, \quad x \in \mathbf{R}, -$$

общее решение уравнения (2.3.10). Поскольку x может быть любым числом, обозначим $x = t$ и будем рассматривать t в качестве параметра. Все решения уравнения (2.3.10) теперь можно записать в виде

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Сравнивая (2.3.11) с (2.3.2), можем сделать вывод, что уравнение (2.3.10) задает прямую с начальной точкой $M_0 \left(0, -\frac{C}{B} \right)$ и направляющим вектором $\vec{a} \left(1, -\frac{A}{B} \right)$. Если в уравнении (2.3.10) $B = 0$, то $A \neq 0$ и доказательство проводится аналогично. ►

Уравнение (2.3.10) называется **общим уравнением прямой**. В следующем утверждении показывается, как по коэффициентам общего уравнения прямой можно найти направляющий вектор этой прямой, и описывается геометрический смысл обращения в нуль коэффициентов общего уравнения прямой.

Утверждение 2.3.1. Пусть $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой Δ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда:

(i) вектор $\vec{a}(-B, A)$, заданный своими координатами в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , является направляющим вектором прямой Δ ;

(ii) $C = 0 \Leftrightarrow$ прямая Δ проходит через начало координат ($O \in \Delta$);

(iii) $A = 0 \Leftrightarrow \Delta \parallel \vec{e}_1$ (прямая Δ параллельна оси Ox либо совпадает с ней);

(iv) $B = 0 \Leftrightarrow \Delta \parallel \vec{e}_2$ (прямая Δ параллельна оси Oy либо совпадает с ней).

Доказательство. (i) Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка прямой Δ . Отложим от точки M_0 вектор $\vec{a}(-B, A)$, получим точку $M_1(x_0 - B, y_0 + A)$. Очевидно, что \vec{a} – направляющий вектор прямой Δ тогда и только тогда, когда $M_1 \in \Delta$. Подставим координаты точки M_1 в уравнение (2.3.10). Получим

$$A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + C = Ax_0 + By_0 + C \equiv 0.$$

Доказательство пунктов (ii) – (iv) предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения. ►

Пусть в уравнении (2.3.10) прямой Δ все коэффициенты ненулевые, т. е. прямая Δ не параллельна координатным осям и не проходит через начало координат. Преобразуем последовательно уравнение (2.3.10):

$$Ax + By + C = 0 \sim Ax + By = -C \sim \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \sim \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Если ввести обозначения $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, то получим уравнение прямой Δ в следующем виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.3.12)$$

Уравнение (2.3.12) называется **уравнением прямой в отрезках**, поскольку a и b – величины отрезков, которые прямая Δ отсекает на координатных осях (рис. 2.3.7).

Будем называть **нормальным вектором прямой** любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой. Пусть (2.3.10) – общее уравнение прямой Δ в ортонормированном репере (O, \vec{i}, \vec{j}) . Покажем, что в этом случае вектор $\vec{n}(A, B)$ – нормальный вектор прямой Δ . Действительно, выше было отмечено, что вектор $\vec{a}(-B, A)$ – направляющий вектор прямой, т. е. $\vec{a} \parallel \Delta$. Поскольку $\vec{n}\vec{a} = -AB + BA = 0$, то $\vec{n}(A, B) \perp \Delta$.

Если для прямой Δ заданы начальная точка $M_0(x_0, y_0)$ своими координатами в ортонормированном репере (O, \vec{i}, \vec{j}) и нормальный вектор прямой $\vec{n}(A, B)$ своими координатами в базисе (\vec{i}, \vec{j}) , то можно записать **уравнение прямой по точке и нормальному вектору** в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2.3.13)$$

Очевидно, что точка $M(x, y)$ лежит на прямой Δ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}(A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ перпендикулярны (рис. 2.3.8).

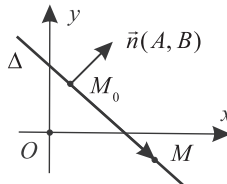


Рис. 2.3.8

Равенство (2.3.13) как раз и выражает это условие.

2.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМЫХ ПО ИХ УРАВНЕНИЯМ

Следующая теорема показывает, как по общим уравнениям прямых можно определить тип их взаимного расположения.

Теорема 2.3.2. Пусть прямые Δ_1 и Δ_2 на плоскости E^2 заданы в некотором аффинном репере общими уравнениями

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда верны следующие утверждения:

(i) прямые Δ_1 и Δ_2 совпадают тогда и только тогда, когда существует ненулевое число $\lambda \in \mathbf{R}$ такое, что $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ (соответствующие коэффициенты уравнений прямых пропорциональны);

(ii) прямые Δ_1 и Δ_2 параллельны тогда и только тогда, когда существует ненулевое число $\lambda \in \mathbf{R}$ такое, что $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, но $C_2 \neq \lambda C_1$ (соответствующие коэффициенты при неизвестных пропорциональны, однако их отношение не равно отношению свободных членов);

(iii) прямые Δ_1 и Δ_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $A_2 : A_1 \neq B_2 : B_1$ (коэффициенты при неизвестных не пропорциональны).

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать справедливость любых двух из трех пунктов теоремы. Тогда третий пункт будет справедлив, поскольку это единственная возможная альтернатива двум другим.

Как было отмечено в утверждении 2.3.1, векторы $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ и $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ – направляющие векторы прямых Δ_1 и Δ_2 соответственно. Очевидно, что прямые совпадают или параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, т. е. $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$ для некоторого ненулевого числа $\lambda \in \mathbf{R}$. Это означает, что выполняются равенства

$$B_2 = \lambda B_1, A_2 = \lambda A_1, \quad (2.3.14)$$

т. е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны. При условии (2.3.14) рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Эта система задает пересечение прямых $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Очевидно, что прямые параллельны тогда и только тогда, когда система (2.3.15) не имеет решений; прямые совпадают тогда и только тогда, когда система (2.3.15) имеет бесконечно много решений. Подставляя во второе уравнение $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$ и вычитая из него первое уравнение, умноженное на λ , получим, что следствием системы (2.3.15) является условие $C_2 - \lambda C_1 = 0$. Это условие приводит к противоречию (система (2.3.15) не имеет решений), если $C_2 : C_1 \neq \lambda$. Следовательно, если прямые совпадают, то необходимо выполнение условий: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Обратно, если соответствующие коэффициенты уравнений пропорциональны, то множества решений этих уравнений совпадают, т. е. $\Delta_1 = \Delta_2$. Таким образом, доказана справедливость пунктов (i) и (ii) теоремы 2.3.1, и, следовательно, теорема полностью доказана. ►

2.3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛИНЕЙНОГО НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим линейное неравенство с двумя переменными x и y :

$$Ax + By + C > 0. \quad (2.3.16)$$

Здесь A, B, C – фиксированные вещественные числа, A и B не равны нулю одновременно. О геометрическом смысле этого неравенства можно говорить, если на плоскости \mathbf{E}^2 выбрать аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда неравенство (2.3.16) задает фигуру Φ , состоящую из всех точек плоскости, координаты которых являются решениями неравенства. Отметим, что фигура Φ не пуста. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим наряду с неравенством (2.3.16) соответствующее ему уравнение

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.3.17)$$

которое в данном репере задает прямую, обозначим ее Δ . Возьмем любую точку $M_0(x_0, y_0)$ на прямой Δ и отложим от нее вектор $\vec{n}(A, B)$. Получим точку $M(x_0 + A, y_0 + B)$ (рис. 2.3.9). Поскольку

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = A^2 + B^2 > 0,$$

то $M \in \Phi$.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ – две точки, не лежащие на прямой Δ . Подставив их координаты в левую часть уравнения (2.3.17), получим два ненулевых числа $\lambda_1 = Ax_1 + By_1 + C$ и $\lambda_2 = Ax_2 + By_2 + C$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3.1. *Отрезок M_1M_2 пересекает прямую Δ тогда и только тогда, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков.*

Доказательство. Рассмотрим формулы из параметрических уравнений прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 :

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1). \end{cases} \quad (2.3.18)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (2.3.18) задают отрезок M_1M_2 , если $t \in [0; 1]$. Следовательно, пересечение $\Delta \cap M_1M_2$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), t \in [0; 1]. \end{cases}$$

Подставим выражения x и y в первое уравнение, получим уравнение с одним неизвестным t :

$$A(x_1 + t(x_2 - x_1)) + B(y_1 + t(y_2 - y_1)) + C = 0.$$

После раскрытия скобок это уравнение можно переписать в виде

$$Ax_1 + By_1 + C + t(Ax_2 + By_2 + C - (Ax_1 + By_1 + C)) = 0$$

или

$$t(\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_1.$$

Нас интересуют условия на λ_1, λ_2 , при которых последнее уравнение имеет единственное решение t_0 такое, что $0 < t_0 < 1$. Для этого необходимо, чтобы

$\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $t_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Теперь несложный анализ показывает, что неравенство $0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} < 1$ эквивалентно условию $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Таким образом, отрезок M_1M_2

пересекает прямую Δ тогда и только тогда, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков. ►

Утверждение 2.3.2. *Линейное неравенство (2.3.16) в произвольном аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задает одну из полуплоскостей, на которые прямая Δ с уравнением (2.3.17) разбивает плоскость E^2 .*

Доказательство. Ранее мы отмечали, что фигура Φ , которая задается неравенством (2.3.16), не пуста. Этой фигуре принадлежит, например, точка $M(x_0 + A, y_0 + B)$, где $M_0(x_0, y_0)$ – точка прямой Δ . Поскольку точка M не лежит

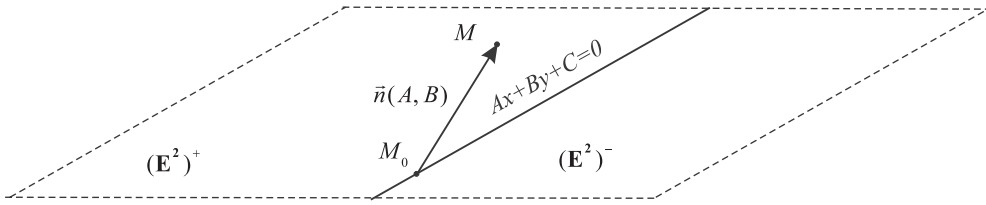


Рис. 2.3.9

на прямой Δ , то M лежит в одной из двух полуплоскостей, на которые плоскость \mathbf{E}^2 разбивается прямой Δ . Обозначим эту полуплоскость $(\mathbf{E}^2)^+$, вторую полуплоскость – $(\mathbf{E}^2)^-$ и покажем, что $\Phi = (\mathbf{E}^2)^+$. Точка $N(x, y)$ лежит в полуплоскости $(\mathbf{E}^2)^+$ тогда и только тогда, когда отрезок MN не пересекает прямую Δ . В силу леммы 2.3.1 последнее условие эквивалентно тому, что числа $\lambda = Ax + By + C$ и $A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = A^2 + B^2 > 0$ одного знака, т. е. положительны (см. рис. 2.3.9). ►

2.3.4. ВЕЛИЧИНА УГЛА МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

В п. 2.3.4 все уравнения прямых и координаты точек даны в ортонормированном репере (O, \vec{i}, \vec{j}) на плоскости \mathbf{E}^2 , а координаты векторов – в соответствующем базисе (\vec{i}, \vec{j}) .

Пусть прямые Δ_1 и Δ_2 на плоскости \mathbf{E}^2 заданы уравнениями

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

В общем случае прямые Δ_1 и Δ_2 пересекаются в одной точке и образуют 4 угла, величины которых – числа α_1, α_2 такие, что $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \pi$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$. Поскольку $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ и $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ – направляющие векторы прямых, то при любом варианте расположения прямых величину наименьшего из углов можно найти по формуле

$$\alpha_1 = \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Пусть известны угловые коэффициенты $k_1 = \tan \varphi_1$ и $k_2 = \tan \varphi_2$ прямых Δ_1 и Δ_2 соответственно, пересекающихся в одной точке. Можно считать, что $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi$, где φ – величина угла поворота первой прямой вокруг точки пересечения до совмещения со второй прямой (рис. 2.3.10). Тогда $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, и, следовательно, если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\tan \varphi = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)}{1 + \tan \varphi_1 \tan \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ эквивалентно условию $k_1 k_2 = -1$.

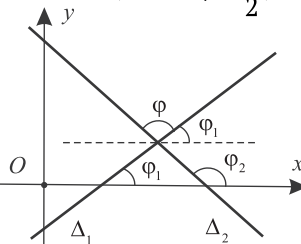


Рис. 2.3.10

2.3.5. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

В этом пункте, как и в предыдущем, все уравнения прямых и координаты точек даны в ортонормированном репере (O, \vec{i}, \vec{j}) на плоскости E^2 .

Пусть прямая Δ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Получим формулу для вычисления расстояния $d(M_0, \Delta)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой Δ . Известно, что $d(M_0, \Delta) = |M_0Q|$, где Q – основание перпендикуляра, проведенного из точки M_0 на прямую Δ . Точка Q есть точка пересечения прямой Δ и прямой Δ_1 , проходящей через точку M_0 и перпендикулярной прямой Δ (рис. 2.3.11). Запишем параметрические уравнения прямой Δ_1 . В качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор $\vec{n}(A, B)$ – нормальный (перпендикулярный) вектор прямой Δ . Получим

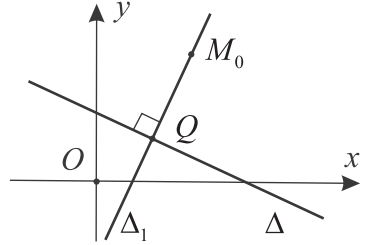


Рис. 2.3.11

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt. \end{cases}$$

Для нахождения координат точки Q надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt. \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение системы выражения x и y через t . Получим уравнение с неизвестной t : $(A^2 + B^2)t = -(Ax_0 + By_0 + C)$, решением которого является число $t_0 = \frac{-(Ax_0 + By_0 + C)}{(A^2 + B^2)}$. Таким образом,

$$d(M_0, \Delta) = |M_0Q| = \sqrt{A^2 t_0^2 + B^2 t_0^2} = |t_0| \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

§ 2.4. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

В § 2.4 мы рассмотрим различные варианты задания плоскостей и прямых в пространстве, приведем формулы и утверждения, позволяющие решать связанные с ними задачи. Материал параграфа разобьем на несколько пунктов.

2.4.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть π – плоскость в пространстве E^3 , M_0 – фиксированная (начальная) точка плоскости, (\vec{a}_1, \vec{a}_2) – базис множества $V(\pi)$ векторов плоскости (\vec{a}_1, \vec{a}_2 – направляющие векторы плоскости π). Очевидно, что точка M пространства принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ принадлежит множеству $V(\pi)$, т. е. представляется в виде

$$\overline{M_0M} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 \quad (2.4.1)$$

для некоторых $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ (рис. 2.4.1). Зафиксируем в пространстве точку O и обозначим \vec{r}_0 и \vec{r} радиус-векторы соответственно точек M_0 и M . Тогда $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, и равенство (2.4.1) можно переписать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \quad (2.4.2)$$

Формула (2.4.2) называется **векторно-параметрическим уравнением** плоскости π .

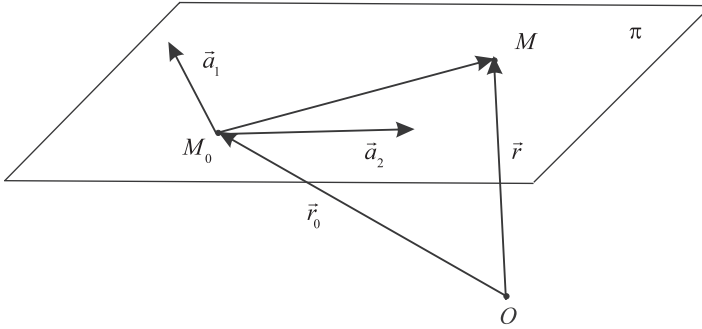


Рис. 2.4.1

Присоединим к точке O базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ множества $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ векторов пространства, получим аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в пространстве \mathbf{E}^3 . Пусть (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) – координаты точек M и M_0 соответственно в данном репере. Согласно определению 2.1.2, (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) – также координаты радиус-векторов \vec{r} и \vec{r}_0 в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Пусть (l_1, m_1, n_1) и (l_2, m_2, n_2) – координаты векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 соответственно в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда векторное равенство (2.4.2) равносильно трем скалярным равенствам

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 l_1 + t_2 l_2, \\ y = y_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2, \\ z = z_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Формулы (2.4.3) выражают координатно-параметрическое задание плоскости, они называются также **координатно-параметрическими уравнениями** плоскости π . В этих формулах t_1, t_2 – параметры, которые могут принимать любые вещественные значения. При фиксировании значений параметров по формулам (2.4.3) вычисляются координаты конкретной точки плоскости.

Еще один способ задания плоскости в пространстве получается, если заметить, что необходимым и достаточным условием принадлежности точки M плоскости π является компланарность векторов $\overline{M_0M}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$. Последнее условие можно выразить через координаты векторов (утверждение 1.9.1) и записать уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.4)$$

Раскрывая определитель, получим, что уравнение (2.4.4) есть линейное уравнение с тремя неизвестными:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.4.5)$$

Уравнение (2.4.5) называется **общим уравнением** плоскости π .

Хорошо известно, что любая плоскость однозначно определяется своими тремя точками, не лежащими на одной прямой. Пусть это будут точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Выберем в качестве начальной точки плоскости $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а в качестве базисных векторов множества $\mathbf{V}(\pi)$ – неколлинеарные векторы:

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ и } \vec{a}_2 = \overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

В этом случае можно записать общее уравнение плоскости по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.6)$$

Для случая пространства справедлива теорема, аналогичная теореме 2.3.1 для плоскости.

Теорема 2.4.1. Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – аффинный репер в пространстве \mathbf{E}^3 .

(i) Любая плоскость в пространстве \mathbf{E}^3 может быть задана в данном репере линейным уравнением (2.4.5).

(ii) Обратно, любое уравнение (2.4.5) при условии, что числа A , B и C не равны нулю одновременно, задает в данном репере плоскость.

Доказательство. Истинность части (i) теоремы была отмечена выше.

(ii) Пусть, для определенности, $C \neq 0$ в уравнении (2.4.5). Тогда

$$z = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y, \quad x, y \in \mathbf{R}, -$$

общее решение уравнения (2.4.5). Поскольку x и y могут быть любыми числами, обозначим $x = t_1$, $y = t_2$ и будем рассматривать t_1, t_2 в качестве параметров. Все решения уравнения (2.4.5) теперь можно записать в виде

$$\begin{cases} x = t_1, \\ y = t_2, \\ z = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C}t_1 - \frac{B}{C}t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Сравнивая последние формулы с параметрическими уравнениями (2.4.3), можно сделать вывод, что уравнение (2.4.5) задает плоскость с начальной точкой

$M_0\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ и базисными векторами $\vec{a}_1\left(1, 0, -\frac{A}{C}\right)$, $\vec{a}_2\left(0, 1, -\frac{B}{C}\right)$. Если в уравне-

нии (2.4.5) $C = 0$, то $A \neq 0$ или $B \neq 0$ и доказательство проводится аналогично. ►

В следующем утверждении описывается геометрический смысл обращения в нуль коэффициентов общего уравнения плоскости.

Утверждение 2.4.1. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости π в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда:

- (i) $D = 0 \Leftrightarrow$ плоскость π проходит через начало координат ($O \in \pi$);
- (ii) $A = 0 \Leftrightarrow$ плоскость π параллельна оси Ox (если $D \neq 0$) или содержит ось Ox (если $D = 0$);
- (iii) $B = 0 \Leftrightarrow$ плоскость π параллельна оси Oy (если $D \neq 0$) или содержит ось Oy (если $D = 0$);
- (iv) $C = 0 \Leftrightarrow$ плоскость π параллельна оси Oz (если $D \neq 0$) или содержит ось Oz (если $D = 0$).

Доказательство этого утверждения предлагается провести читателю самостоятельно в качестве упражнения.

Пусть в уравнении (2.4.5) все коэффициенты ненулевые, т. е. плоскость π не параллельна координатным осям и не проходит через начало координат. Тогда уравнение (2.4.5) можно переписать в виде

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Если ввести обозначения $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$, то получим уравнение плоскости π в следующем виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.4.7)$$

Уравнение (2.4.7) называется **уравнением плоскости в отрезках**, поскольку a, b и c – величины отрезков, которые плоскость π отсекает на координатных осях (рис. 2.4.2).

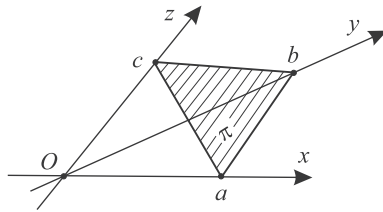


Рис. 2.4.2

Будем называть **нормальным вектором плоскости** любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости. Пусть (2.4.5) – общее уравнение плоскости π в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. В этом случае вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости π . Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что этот вектор ортогонален вектору $\overline{M_1M_2}$, построенному по любым точкам M_1, M_2 плоскости π . Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \overrightarrow{M_1 M_2} &= A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = \\ &= (Ax_2 + By_2 + Cz_2) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = (-D) - (-D) = 0,\end{aligned}$$

т. е. $\vec{n}(A, B, C) \perp \pi$.

Если для плоскости π заданы начальная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ своими координатами в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}(A, B, C)$ своими координатами в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то можно записать уравнение плоскости π в данном репере в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.4.8)$$

На самом деле, очевидно, что точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}(A, B, C)$ и $\overrightarrow{M_0 M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярны (рис. 2.4.3).

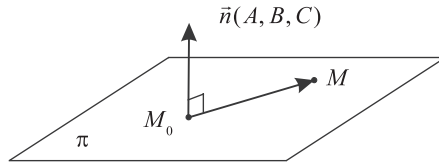


Рис. 2.4.3

Равенство (2.4.8) как раз и выражает это условие.

2.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ ПО ИХ УРАВНЕНИЯМ

Следующая теорема показывает, как по общим уравнениям плоскостей можно определить тип их взаимного расположения.

Теорема 2.4.2. Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы в некотором аффинном репере общими уравнениями

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (2.4.9)$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (2.4.10)$$

Тогда верны следующие эквивалентности:

(i) плоскости π_1 и π_2 совпадают тогда и только тогда, когда существует ненулевое число $\lambda \in \mathbf{R}$ такое, что $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, $D_2 = \lambda D_1$ (соответствующие коэффициенты уравнений плоскостей пропорциональны);

(ii) плоскости π_1 и π_2 параллельны тогда и только тогда, когда существует ненулевое число $\lambda \in \mathbf{R}$ такое, что $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, но $D_2 \neq \lambda D_1$ (соответствующие коэффициенты уравнений при неизвестных пропорциональны, однако их отношение не равно отношению свободных членов);

(iii) плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда не существует числа $\lambda \in \mathbf{R}$ такого, что $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ (коэффициенты при неизвестных не пропорциональны).

Доказательство. Заметим, что, как и в случае теоремы 2.3.2, достаточно доказать справедливость любых двух из трех пунктов теоремы 2.4.2. Тогда третий

пункт будет справедлив, поскольку это единственная возможная альтернатива двум другим.

Докажем теорему в случае, когда уравнения плоскостей даны в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Как отмечено выше, в рассматриваемом случае векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы для плоскостей π_1 и π_2 соответственно. Очевидно, что плоскости совпадают или параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны, т. е. $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ для некоторого ненулевого числа $\lambda \in \mathbf{R}$. Это означает, что выполняются равенства

$$B_2 = \lambda B_1, A_2 = \lambda A_1, C_2 = \lambda C_1, \quad (2.4.11)$$

т. е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны. При условии (2.4.11) рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Эта система задает пересечение плоскостей $\pi_1 \cap \pi_2$. Очевидно, что плоскости параллельны тогда и только тогда, когда система (2.4.12) не имеет решений; плоскости совпадают тогда и только тогда, когда система (2.4.12) имеет бесконечно много решений. Подставляя во второе уравнение $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ и вычитая из него первое уравнение, умноженное на λ , получим, что следствием системы (2.4.12) является условие $D_2 - \lambda D_1 = 0$, которое приводит к противоречию (система (2.4.12) не имеет решений), если $D_2 : D_1 \neq \lambda$. Следовательно, если плоскости совпадают, то необходимо выполнение условий: $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1, D_2 = \lambda D_1$. Обратно, если соответствующие коэффициенты уравнений пропорциональны, то множества решений этих уравнений совпадают, т. е. $\pi_1 = \pi_2$. Таким образом, доказана справедливость пунктов (i) и (ii), а следовательно, и всей теоремы 2.4.2 в случае ортонормированного репера.

Для завершения доказательства можно проследить, как изменяется общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ при переходе от общего аффинного репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ к ортонормированному реперу $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Для этого используем формулы преобразования координат точек (см. формулы (2.1.3')):

$$\begin{cases} x = s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + s_{23}z', \\ z = s_{31}x' + s_{32}y' + s_{33}z'. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

В нашем случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, так как точки O и O' совпадают. Подставив выражения x, y, z из этих формул в исходное уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, получим общее уравнение $A'x + B'y + C'z + D = 0$ плоскости π в репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Нетрудно убедиться, что при таком изменении уравнений отношения одноименных коэффициентов в уравнениях плоскостей π_1 и π_2 сохраняются. Тем самым доказательство в случае общего аффинного репера сводится к случаю ортонормированного репера. Детали оставляем читателю в качестве упражнения. ►

2.4.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛИНЕЙНОГО НЕРАВЕНСТВА С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим линейное неравенство с тремя переменными x, y, z :

$$Ax + By + Cz + D > 0. \quad (2.4.14)$$

Здесь A, B, C, D – фиксированные вещественные числа, A, B и C не равны нулю одновременно. О геометрическом смысле этого неравенства можно говорить, если в пространстве E^3 выбрать аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда неравенство (2.4.14) задает фигуру Φ , состоящую из всех точек пространства, координаты которых являются решениями неравенства. Геометрический смысл неравенства (2.4.14) выражается сформулированным ниже утверждением, доказательство которого мы опускаем, поскольку оно совершенно аналогично доказательству утверждения 2.3.4 для неравенства с двумя переменными.

Утверждение 2.4.2. *Линейное неравенство (2.4.14) в произвольном аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задает одно из полупространств, на которые плоскость с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ разбивает пространство E^3 .*

2.4.4. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Как и на плоскости, прямая в пространстве может быть задана параметрически, а также общими уравнениями. Вывод векторно-параметрического уравнения прямой в пространстве совершенно аналогичен случаю прямой на плоскости.

Пусть Δ – прямая в пространстве E^3 , M_0 – фиксированная точка, \vec{a} – направляющий вектор прямой Δ . Необходимое и достаточное условие того, что точка пространства M лежит на прямой Δ , формулируется следующим образом: $(M \in \Delta) \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ (векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{a} коллинеарны) (рис. 2.4.4).

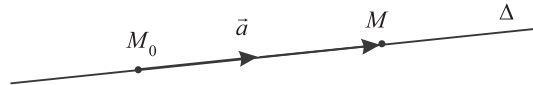


Рис. 2.4.4

Пусть O – фиксированная точка пространства, $\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-вектор начальной точки M_0 , $\vec{r} = \overline{OM}$ – радиус-вектор произвольной точки M пространства. Коллинеарность векторов $\overline{M_0M}$ и \vec{a} означает, что $\overline{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого $t \in \mathbf{R}$. Учитывая, что $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, имеем следующую цепочку эквивалентностей:

$$(M \in \Delta) \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}) \Leftrightarrow (\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}), t \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, мы получили векторно-параметрическое задание прямой:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbf{R}. \quad (2.4.15)$$

Равенство (2.4.15) называют также **векторно-параметрическим уравнением** прямой Δ . Формула (2.4.15) по виду совпадает с соответствующей формулой для прямой на плоскости, отличие только в том, что векторы, участвующие в этой формуле, являются векторами пространства, а не плоскости. Присоединим к точке O базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ множества векторов пространства $\mathbf{V}(E^3)$, получим аффинный ре-

пер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в пространстве E^3 . Пусть (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) – координаты точек M и M_0 соответственно в данном репере, (l, m, n) – координаты направляющего вектора прямой \vec{a} в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда векторное равенство (2.4.1) равносильно трем скалярным равенствам

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Формулы (2.4.16) выражают координатно-параметрическое задание прямой и называются **координатно-параметрическими уравнениями** прямой Δ .

Исключая из уравнений (2.4.16) параметр t , получим равенства

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (2.4.17)$$

которые называются **каноническим уравнением** прямой в пространстве. Поскольку направляющий вектор $\vec{a}(l, m, n)$ прямой ненулевой, то хотя бы одно из чисел l, m, n не равно нулю. Допустим, что $l \neq 0$. Тогда равенства (2.4.17) эквивалентны системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы (как и в случае прямой на плоскости, равенства дробей рассматриваются как пропорции) является линейным уравнением, задающим плоскость. Таким образом, прямая Δ задается здесь как пересечение двух плоскостей. В общем случае, если прямая рассматривается как пересечение двух плоскостей π_1 и π_2 с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно, то эта прямая задается системой уравнений вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2.4.18)$$

При этом, согласно теореме 2.4.2, коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы не пропорциональны. Уравнения (2.4.18) называются **общими уравнениями** прямой.

Пусть Δ_1 и Δ_2 – прямые в пространстве, заданные начальными точками и направляющими векторами M_0, \vec{a}_1 и N_0, \vec{a}_2 соответственно. Есть четыре варианта их взаимного расположения в пространстве: они могут совпадать, быть параллельными, пересекаться в одной точке либо скрещиваться. По координатам их направляющих векторов $(\vec{a}_1(l_1, m_1, n_1))$ и $(\vec{a}_2(l_2, m_2, n_2))$ соответственно легко отличить первые две возможности от двух других: *прямые Δ_1 и Δ_2 совпадают или параллельны тогда и только тогда, когда координаты их направляющих векторов пропорциональны:*

$$l_2 = \lambda l_1, m_2 = \lambda m_1, n_2 = \lambda n_1 \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbf{R}.$$

При выполнении последнего условия нетрудно различить между собой случаи совпадения прямых либо их параллельности. Для этого достаточно взять любую точку на одной прямой и проверить, лежит ли она на другой прямой. Приведем также критерий того, что две прямые скрещиваются.

Утверждение 2.4.3. Пусть Δ_1 и Δ_2 – прямые в пространстве, заданные начальными точками и направляющими векторами M_0, \vec{a}_1 и N_0, \vec{a}_2 соответственно. Прямые Δ_1 и Δ_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда векторы \vec{a}_1, \vec{a}_2 и $\overline{M_0N_0}$ не компланарны.

Доказательство. Условие компланарности векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2 и $\overline{M_0N_0}$, очевидно, эквивалентно тому, что прямые Δ_1 и Δ_2 лежат в одной плоскости. Следовательно, векторы \vec{a}_1, \vec{a}_2 и $\overline{M_0N_0}$ не компланарны тогда и только тогда, когда прямые Δ_1 и Δ_2 не лежат в одной плоскости, т. е. скрещиваются. ►

Получим формулу для вычисления расстояния от точки M_0 до прямой Δ , заданной начальной точкой M_1 и направляющим вектором \vec{a} . Пусть M_0 не лежит на прямой Δ . Отложим вектор \vec{a} от точки M_1 , получим точку прямой M_2 , причем точки M_0, M_1, M_2 образуют треугольник. Расстояние от точки M_0 до прямой Δ – это длина высоты h треугольника $M_0M_1M_2$, проведенной из точки M_0 (рис. 2.4.5). Следовательно,

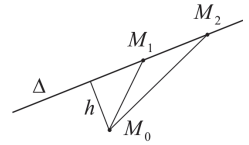


Рис. 2.4.5

$$d(M_0, \Delta) = h = \frac{2S_{\Delta M_0 M_1 M_2}}{|M_1 M_2|} = \frac{|\overline{M_0 M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Если точка M_0 лежит на прямой Δ , то расстояние от M_0 до Δ равно нулю. Последняя формула, очевидно, работает и в этом случае.

2.4.5. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Пусть в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в пространстве E^3 заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние $d(M_0, \pi)$ от точки M_0 до плоскости π выражается формулой

$$d(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Вывод этой формулы предлагается в качестве упражнения, он совершенно аналогичен выводу формулы расстояния от точки до прямой на плоскости, проведенному в п. 2.3.5.

ГЛАВА 3

ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Фигуры, которые изучались в предыдущей главе, т. е. прямые и плоскости, задавались в аффинных реперах линейными уравнениями (уравнениями первой степени). Поэтому они называются *фигурами первого порядка*. В этой главе мы рассмотрим *фигуры второго порядка*, которые в аффинных реперах задаются уравнениями второй степени. В § 3.1 познакомимся с *эллипсом* и *гиперболой*, которые вместе с *параболой* (известной из школьного курса) являются важнейшими примерами фигур второго порядка. В § 3.2 выясним, какие плоские фигуры являются фигурами второго порядка. В § 3.3 рассмотрим некоторые общие свойства эллипса, гиперболы и параболы. Последние три параграфа этой главы посвящены пространственным фигурам второго порядка.

§ 3.1. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

3.1.1. ЭЛЛИПС

Определение 3.1.1. *Эллипсом* называется фигура на плоскости E^2 , которая в некоторой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.1.1)$$

где a и b – фиксированные положительные числа, причем $a > b$.

Уравнение (3.1.1) называется **каноническим уравнением** эллипса.

Будем считать, что система координат Oxy расположена на плоскости стандартным образом относительно наблюдателя: ось Ox горизонтальна и направлена слева направо, ось Oy вертикальна и направлена снизу вверх. Поскольку в уравнение (3.1.1) неизвестные x и y входят во второй степени, то вместе с любой точкой $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей эллипсу, ему принадлежат точки $M_1(-x_0, y_0)$, $M_2(x_0, -y_0)$, $M_3(-x_0, -y_0)$. Это означает, что эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Поэтому, чтобы нарисовать эллипс, достаточно изобразить его часть, лежащую в верхней полуплоскости относительно оси Ox , и затем достроить недостающую часть, пользуясь симметрией.

Из уравнения (3.1.1) получим, что в верхней полуплоскости, т. е. при условии, что $y \geq 0$, эллипс задается графиком функции

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Область определения этой функции – отрезок $[-a; a]$; $y(-a) = y(a) = 0$. Таким образом, эллипс пересекает ось Ox в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. Так как $y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, то функция возрастает на отрезке $[-a; 0]$ и убывает на отрезке $[0; a]$; точка $x = 0$ – точка максимума и $y(0) = b$. В точках $x = \pm a$ производная не определена, $\lim_{x \rightarrow -a} y'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} y'(x) = -\infty$. Это означает, что эллипс пересекает ось Ox в точках A_1 и A_2 перпендикулярно прямой Ox . Поскольку $y'' = -\frac{b}{a} \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} < 0$ на интервале $(-a; a)$, то график исследуемой функции – дуга кривой, выпуклой вверх, соединяющей точки A_1 и A_2 . Полученной информации достаточно для того, чтобы нарисовать график рассматриваемой функции. Используя симметрию относительно оси Ox , получим изображение всего эллипса (рис. 3.1.1).

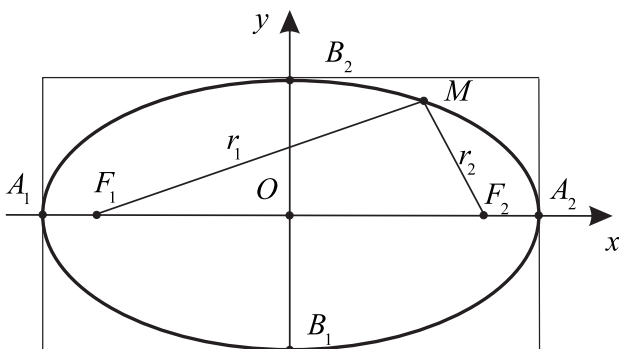


Рис. 3.1.1

Таким образом, эллипс – ограниченная фигура, лежащая внутри прямоугольника размерами $2a \times 2b$ со сторонами, параллельными осям координат, и с центром в начале координат. Этот прямоугольник называется **основным прямоугольником** эллипса. Эллипс касается середин сторон основного прямоугольника в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$, которые называются **вершинами** эллипса. Числа a и b называются соответственно **большой полуосью** и **меньшей полуосью** эллипса, прямые A_1A_2 и B_1B_2 – **осями** эллипса.

Поскольку в уравнении (3.1.1) эллипса $a > b$, можно определить число $c = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$. Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ называется **эксцентриситетом**.

Эксцентриситет эллипса – положительное число, меньшее единицы, характеризующее его форму. Если ε стремится к 0, то полуоси b и a отличаются мало и эл-

липс приближается к окружности, если ε стремится к 1, то полуось b значительно меньше a и эллипс приближается к отрезку (рис. 3.1.2).



Рис. 3.1.2

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ называются **фокусами** эллипса. Если $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1 и MF_2 , а также их длины $r_1 = |MF_1|$, $r_2 = |MF_2|$ называются **фокальными радиусами** точки M . Вычислим значения фокальных радиусов:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + c^2 \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 + 2xc + c^2 \frac{x^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = a + \varepsilon x. \end{aligned}$$

При извлечении последнего квадратного корня следует учесть, что $0 < \varepsilon < 1$ и для точки $M(x, y)$ эллипса верно неравенство $|x| \leq a$. Аналогично $r_2 = a - \varepsilon x$. Заметим, что $r_1 + r_2 = 2a$, т. е. для любой точки эллипса с уравнением (3.1.1) сумма расстояний до фокусов постоянна и равна $2a$. Отмеченное свойство является *характеристическим* для эллипса. Это означает, что верно следующее утверждение.

Теорема 3.1.1. Пусть F_1 и F_2 – две точки плоскости, расстояние между которыми равно $2c$, $c > 0$. Тогда фигура Φ , состоящая из всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до F_1 и F_2 постоянна и равна $2a$, $a > c$, есть эллипс. Точки F_1 и F_2 являются фокусами этого эллипса.

Доказательство. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 и F_2 , а начало системы координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2 . В этой системе координат точки F_1 и F_2 имеют следующие координаты: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости. Тогда

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Следовательно, уравнение фигуры Φ имеет вид

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3.1.2)$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат. Раскрывая скобки и приводя подобные, получим уравнение

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения и приведем подобные:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку по условию $a > c$, то можно определить число $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$, $b < a$. Разделив обе части последнего уравнения на a^2b^2 , получим, что все точки фигуры Φ удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, то точки F_1 и F_2 являются его фокусами. ►

Наряду с каноническим уравнением (3.1.1) часто используют параметрическое задание эллипса, которое получается следующим образом. Пусть Oxy – прямоугольная система координат. Рассмотрим две концентрические окружности с центром в точке O и радиусами a и b (рис. 3.1.3).

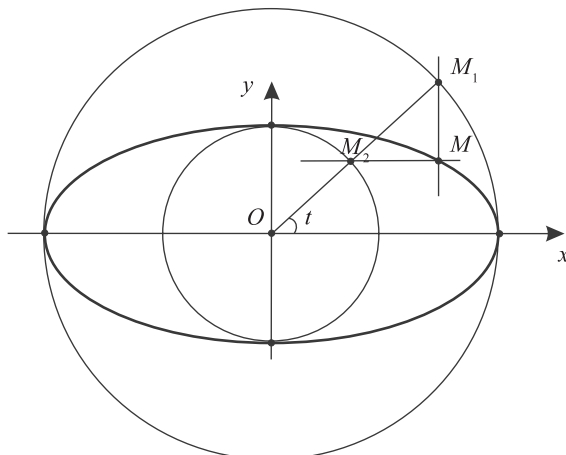


Рис. 3.1.3

Пусть t – произвольное вещественное число. Из точки O проведем луч, образующий угол t с положительным направлением оси Ox . Этот луч пересекает окружности в точках $M_1(a \cos t, a \sin t)$ и $M_2(b \cos t, b \sin t)$. Через точку M_1 проведем прямую, параллельную оси Oy , а через точку M_2 – прямую, параллельную оси Ox . Эти прямые пересекаются в точке $M(a \cos t, b \sin t)$, которая, очевидно, лежит на эллипсе с уравнением (3.1.1). Легко видеть, что если t принимает все вещественные значения, то M пробегает все точки эллипса, следовательно, параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Отметим, что эллипс может быть получен из окружности преобразованием *сжатия* к диаметру окружности.

Определение 3.1.2. *Сжатием* плоскости E^2 к прямой Ox вдоль прямой Oy называется отображение $f: E^2 \rightarrow E^2$, которое на произвольную точку плоскости $M(x, y)$, заданную своими координатами, действует по правилу

$$M(x, y) \mapsto M'(x, ky), \quad (3.1.3)$$

где k – фиксированное вещественное число, $0 < k < 1$, которое называется **коэффициентом сжатия** (рис. 3.1.4).

Утверждение 3.1.1. Пусть Φ – фигура на плоскости E^2 , заданная уравнением $F(x, y) = 0$ относительно прямоугольной системы координат Oxy . Тогда фигура $\Phi' = f(\Phi)$, полученная из Φ сжатием (3.1.3), имеет уравнение $F\left(x, \frac{y}{k}\right) = 0$.

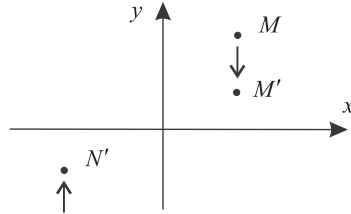


Рис. 3.1.4

Доказательство. Очевидно, что точка плоскости $M'_0(x_0, y_0)$ принадлежит фигуре Φ' тогда и только тогда, когда она получена преобразованием сжатия из точки $M_0(x_0, \frac{y_0}{k})$ фигуры Φ . Следовательно,

$$M'_0(x_0, y_0) \in \Phi' \Leftrightarrow F\left(x_0, \frac{y_0}{k}\right) = 0. \blacktriangleright$$

В качестве следствия этого утверждения применяя преобразование сжатия к окружности Φ с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ относительно прямоугольной системы координат Oxy , получим фигуру Φ' с уравнением $x^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 = a^2$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ka)^2} = 1$, т. е. эллипс с полуосями a и $b = ka$.

Замечание 3.1.1. Можно рассматривать преобразования плоскости $f: E^2 \rightarrow E^2$, которые задаются формулами (3.1.3) при произвольном положительном k . Тогда при $k = 1$ f – тождественное преобразование; при $k > 1$ геометрический смысл преобразования заключается в том, что плоскость *растягивается* относительно оси Ox вверх и вниз. Для упрощения терминологии любое преобразование, которое задается формулами (3.1.3) при $k > 0$ принято называть **сжатием** с коэффициентом k . Более того, можно вместо прямоугольной рассматривать общую аффинную систему координат Oxy . Тогда геометрический смысл преобразования (3.1.3) заключается в *косом сжатии* (или *растяжении*) плоскости (рис. 3.1.5).

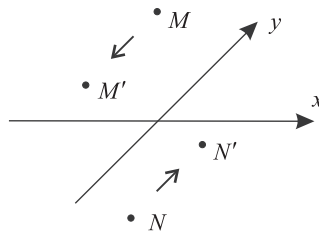


Рис. 3.1.5

3.1.2. ГИПЕРБОЛА

Определение 3.1.3. *Гиперболой называется фигура на плоскости E^2 , которая в некоторой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.1.4)$$

где a и b – фиксированные положительные числа.

Уравнение (3.1.4) называется **каноническим уравнением** гиперболы.

Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка гиперболы, то из уравнения (3.1.3) вытекает, что $|x_0| \geq a$. Это означает, что гипербола – фигура, лежащая вне полосы шириной $2a$, которая определяется неравенством $|x| < a$. Поскольку в уравнение (3.1.4) неизвестные x и y входят во второй степени, то гипербола, также как эллипс, симметрична относительно осей координат и начала координат. Поэтому, чтобы нарисовать гиперболу, достаточно изобразить ее часть, лежащую в первой четверти, и затем достроить недостающие части, пользуясь симметрией. Считая $x \geq 0, y \geq 0$, из уравнения (3.1.4) получим, что в первой четверти гипербола задается графиком возрастающей функции:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

У этого графика есть наклонная асимптота с уравнением $y = kx + d$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}, \quad d = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - \frac{b}{a}x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) = 0.$$

Далее нетрудно установить, что график функции представляет собой выпуклую вверх кривую, выходящую вертикально из точки $A_2(a, 0)$ и асимптотически приближающуюся к прямой $y = \frac{b}{a}x$, но не пересекающую эту прямую. Используя симметрию, получаем изображение всей гиперболы (рис. 3.1.6).

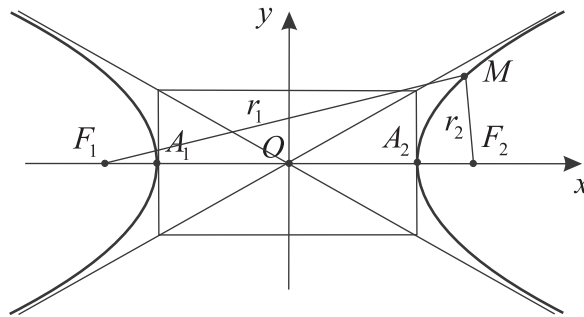


Рис. 3.1.6

Гипербола Φ состоит из двух частей (ветвей), обозначим их: $\Phi^+ = \{M(x, y) \in \Phi \mid x > 0\}$ и $\Phi^- = \{M(x, y) \in \Phi \mid x < 0\}$ – соответственно правая и левая ветви на рис. 3.1.6. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ принадлежат гиперболе и называются

ся ее **вершинами**. Числа a и b называются **полуосями** гиперболы, a – **действительная** полуось, b – **мнимая** полуось. Прямая Ox называется **действительной осью**, прямая Oy – **мнимой осью** гиперболы.

Для изображения гиперболы на листе бумаги или на доске обычно поступают следующим образом. Вначале рисуют прямоугольник размером $2a \times 2b$ со сторонами, параллельными осям координат, и с центром в начале координат, такой же, как для эллипса с уравнением (3.1.1). Этот прямоугольник называется **основным прямоугольником** гиперболы. Затем проводят асимптоты гиперболы $y = \pm \frac{b}{a}x$. Это прямые, на которых лежат диагонали основного прямоугольника. И наконец, рисуют ветви гиперболы Φ^- и Φ^+ так, чтобы они касались основного прямоугольника в вершинах $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ и асимптотически приближались к прямым $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Определим число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, так же как для эллипса, называется **эксцентриситетом**. Эксцентриситет гиперболы – положительное число, большее единицы, характеризующее ее форму ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ на рис. 3.1.7). Если ε стремится к 1, то мнимая полуось b значительно меньше действительной полуоси a и гипербола приближается к двум лучам. Если ε стремится к $+\infty$, то мнимая полуось b значительно больше действительной полуоси a и гипербола приближается к паре параллельных прямых.

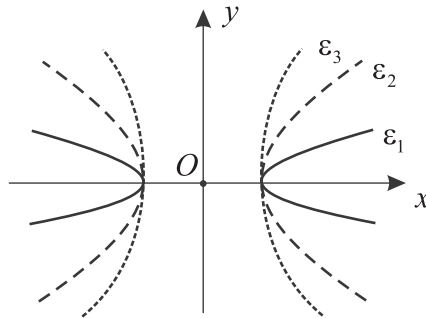


Рис. 3.1.7

У гиперболы с каноническим уравнением (3.1.4) имеются **фокусы**, это две точки: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (см. рис. 3.1.6). Если $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы, то отрезки MF_1 и MF_2 , а также их длины $r_1 = |MF_1|$, $r_2 = |MF_2|$ называются **фокальными радиусами** точки M . Вычислим значения фокальных радиусов:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} = \sqrt{(x+c)^2 + (c^2 - a^2) \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} = \\ &= \sqrt{\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + c^2 \frac{x^2}{a^2} + a^2 - \cancel{c^2} - \cancel{x^2}} = \sqrt{a^2 + 2xc + c^2 \frac{x^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x \right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = \begin{cases} a + \varepsilon x, & \text{если } x > 0, \\ -(a + \varepsilon x), & \text{если } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При раскрытии модуля следует учесть, что $\varepsilon > 1$ и для точки $M(x, y)$ гиперболы $|x| \geq a$. Аналогично

$$r_2 = |a - \varepsilon x| = \begin{cases} -(a - \varepsilon x), & \text{если } x > 0, \\ a - \varepsilon x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что $r_1 - r_2 = 2a$, если $x \in \Phi^+$, и $r_1 - r_2 = -2a$, если $x \in \Phi^-$, т. е. для любой точки гиперболы с уравнением (3.1.4) абсолютная величина разности расстояний до фокусов постоянна и равна $2a$. Отмеченное свойство является *характеристическим* для гиперболы. Это означает, что верно следующее утверждение.

Теорема 3.1.2. Пусть F_1 и F_2 – две точки плоскости, расстояние между которыми равно $2c$, $c > 0$. Тогда фигура Φ , состоящая из всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до F_1 и F_2 постоянна и равна $2a$, $a < c$, есть гипербола. Точки F_1 и F_2 являются фокусами этой гиперболы.

Доказательство. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 и F_2 , а начало системы координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2 . В этой системе точки F_1 и F_2 имеют следующие координаты: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости. Тогда

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Следовательно, уравнение фигуры Φ имеет вид

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \quad (3.1.5)$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат. Раскрывая скобки и приводя подобные, получим уравнение

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Еще раз возводим в квадрат обе части уравнения и приводим подобные:

$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Поскольку по условию $c > a$, то можно определить число $b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$. Разделив обе части последнего уравнения на a^2b^2 , получим, что все точки фигуры Φ удовлетворяют уравнению гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Очевидно, точки F_1 и F_2 являются фокусами этой гиперболы. ►

Наряду с гиперболой, заданной уравнением (3.1.4), можно рассматривать гиперболу, которая задается уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эти две гиперболы называются **сопряженными** друг для друга. У сопряженных гипербол один и тот же основной прямоугольник и совпадают асимптоты, только действительные и мнимые оси меняются местами (рис. 3.1.8).

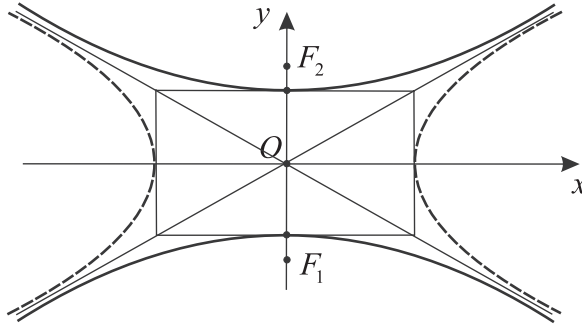


Рис.3.1.8

Гиперболу можно задать параметрически. Соответствующие формулы подобны тем, которые использовались при задании эллипса, только обычные синус и косинус заменяются на гиперболические:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} t \in \mathbf{R}. \quad (3.1.6)$$

Отметим, что формулы (3.1.6) задают только одну ветвь гиперболы, вторая ветвь задается формулами

$$\begin{cases} x = -a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} t \in \mathbf{R}.$$

В средней школе *гиперболой* называется график обратно пропорциональной зависимости, т. е. график функции $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Используя материал § 3.2, можно показать, что этот график по определению 3.1.3 является гиперболой. Для этой гиперболы исходные оси координат являются асимптотами, а прямые с уравнениями $y = \pm x$ – осями. Чтобы это доказать, надо от прямоугольной системы координат Oxy перейти к другой, повернув исходную систему координат вокруг точки O на 45° . В новой системе координат рассматриваемый график задается уравнением $\frac{x^2}{2|k|} - \frac{y^2}{2|k|} = 1$.

3.1.3. ПАРАБОЛА

Парабола известна из школьного курса математики. Здесь мы приведем некоторые термины, принятые при рассмотрении параболы в аналитической геометрии.

Любая парабола при подходящем выборе прямоугольной системы координат Oxy (начало системы координат следует совместить с вершиной параболы, ось Oy – с касательной к параболе в вершине, ось Ox направить в ту полуплоскость относительно Oy , в которой лежат ветви параболы) может быть задана уравнением

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \quad (3.1.7)$$

которое называется **каноническим уравнением** параболы. Число p называется **фокальным параметром** параболы, точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – **фокусом** (рис. 3.1.9). Для параболы с уравнением (3.1.7) ось Ox является осью симметрии, точка $O(0,0)$ – вершиной.

Принято считать, что **эксцентриситет** любой параболы равен единице, $\varepsilon = 1$. Эксцентриситет параболы, так же как в случаях эллипса и гиперболы, характеризует форму фигуры. Поскольку у всех парабол эксцентриситет постоянен, то это означает, что у всех парабол форма одинакова. В математике в таком случае говорят, что фигуры **конформны**. Более точно это означает, что любую параболу можно перевести в любую другую преобразованием **подобия**, т.е. таким преобразованием, при котором расстояния между соответствующими точками увеличиваются (или уменьшаются) в одно и то же число раз. Примером преобразования подобия может служить преобразование плоскости $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, которое произвольную точку $M(x, y)$ переводит в точку $M'(kx, ky)$, $k > 0$. Такое преобразование называется **гомотетией с центром в точке** $O(0,0)$ **и коэффициентом** k . Очевидно, что при гомотетии расстояния между соответствующими точками увеличиваются в k раз. Пусть Φ_1 и Φ_2 – две параболы с фокальными параметрами p_1 и p_2 , заданные уравнениями соответственно $y^2 = 2p_1x$ и $y^2 = 2p_2x$. Читателю предлагается в качестве упражнения убедиться в том, что первая парабола переводится во вторую гомотетией с коэффициентом $k = \frac{p_2}{p_1}$.

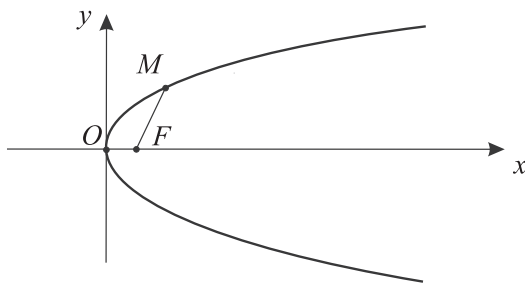


Рис. 3.1.9

Для произвольной точки $M(x, y)$ параболы отрезок MF , а также его длина $r = |MF|$ называются **фокальным радиусом** точки M . Вычислим значение фокального радиуса:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = x + \frac{p}{2}.$$

§ 3.2. ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Определение 3.2.1. *Фигурой второго порядка на плоскости \mathbb{E}^2 называется фигура, которая в некотором аффинном репере может быть задана уравнением второй степени с двумя неизвестными.*

Таким образом, фигура Φ , $\Phi \subset \mathbf{E}^2$, является фигурой второго порядка, если существует аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, в котором Φ задается уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (3.2.1)$$

В уравнении (3.2.1) A, B, C, D, E, F – фиксированные вещественные числа, x, y – неизвестные, коэффициент 2 в трех слагаемых поставлен для удобства дальнейших преобразований уравнения. Поскольку (3.2.1) – уравнение второй степени, среди коэффициентов A, B, C есть ненулевые. Это условие можно записать в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Утверждение 3.2.1. Фигура Φ , которая в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана уравнением (3.2.1) с условием (3.2.2), в любом другом репере $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ может быть задана уравнением такого же типа.

Доказательство. Будем использовать матричные обозначения. У нас уже есть матрица A коэффициентов квадратичной части уравнения. Обозначим $[a] = (D \ E)$ строку коэффициентов линейной части и $(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных. В таких обозначениях уравнение (3.2.1) переписывается в виде

$$(x)^t A(x) + 2[a](x) + F = 0. \quad (3.2.1')$$

Чтобы найти уравнение фигуры Φ в репере $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$, запишем формулы преобразования координат точек (формулы (2.1.2) из § 2.1) при переходе от репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ к реперу $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$:

$$(x) = S(x') + (\alpha), \quad (3.2.3)$$

и подставим выражение (x) из (3.2.3) в уравнение (3.2.1'). Получим

$$\begin{aligned} & (S(x') + (\alpha))^t A (S(x') + (\alpha)) + 2[a](S(x') + (\alpha)) + F = 0; \\ & (x')^t (S^t A S) (x') + 2((\alpha)^t A S + [a]S)(x') + (\alpha)^t A(\alpha) + F = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Φ в репере $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ имеет такой же вид, как уравнение (3.2.1'):

$$(x')^t A'(x') + 2[a'](x') + F' = 0, \quad (3.2.4)$$

где $A' = S^t A S$, $[a'] = (\alpha)^t A S + [a]S$, $F' = (\alpha)^t A(\alpha) + F$. Покажем, что A' – ненулевая матрица. Рассуждаем «методом от противного». Допустим, что $A' = 0$. Поскольку S и S^t – невырожденные матрицы, для них существуют обратные: S^{-1} и $(S^t)^{-1}$. Умножим обе части равенства $A' = S^t A S$ слева на $(S^t)^{-1}$, а справа – на S^{-1} . Получим $A = (S^t)^{-1} A' S = (S^t)^{-1} 0 S = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. ►

Далее мы выясним, какие бывают фигуры второго порядка. Зафиксируем на плоскости ортонормированный репер (O, \vec{i}, \vec{j}) . Согласно утверждению 3.2.1, любая фигура второго порядка Φ в этом репере имеет уравнение вида (3.2.1). Предположим, что в этом уравнении коэффициент при произведении неизвестных отличен от нуля: $B \neq 0$. Покажем, что, повернув репер (O, \vec{i}, \vec{j}) вокруг начала координат на подходящий угол φ , т. е. перейдя к другому ортонормированному реперу (O, \vec{i}', \vec{j}') , можно добиться того, что в новом репере фигура Φ имеет уравнение вида (3.2.1) с нулевым коэффициентом при произведении неизвестных. Запишем формулы преобразования координат при повороте прямоугольной системы координат вокруг точки O на угол φ (см. § 2.1):

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Подставив выражения x и y в уравнение (3.2.1), получим уравнение вида (3.2.1) фигуры Φ в системе координат (O, \vec{i}', \vec{j}') . Нас интересует коэффициент B' при произведении неизвестных $x'y'$:

$$\begin{aligned} B' &= -2A \cos \varphi \sin \varphi + 2B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2C \cos \varphi \sin \varphi = \\ &= 2B \cos 2\varphi - (A - C) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Если угол φ выбрать таким, что

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{A - C}{2B},$$

то $B' = 0$. Таким образом, можно считать, что в подходящей прямоугольной системе координат, которую обозначим по-старому (O, \vec{i}, \vec{j}) , фигура Φ имеет уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (3.2.6)$$

причем коэффициенты A и C не равны нулю одновременно. Рассмотрим несколько возможных вариантов для чисел A и C .

I. Пусть $A \neq 0$, $C \neq 0$. Преобразуем левую часть уравнения (3.2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F &= \\ &= A \left(x^2 + 2 \frac{D}{A} x + \frac{D^2}{A^2} \right) - \frac{D^2}{A} + C \left(y^2 + 2 \frac{E}{C} y + \frac{E^2}{C^2} \right) - \frac{E^2}{C} + F = \\ &= A \left(x + \frac{D}{A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 - F'; \quad F' = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F. \end{aligned}$$

Произведем параллельный перенос системы координат

$$(O, \vec{i}, \vec{j}) \rightarrow (O', \vec{i}', \vec{j}')$$

согласно формулам

$$\begin{cases} x' = x + \frac{D}{A}, \\ y' = y + \frac{E}{C}. \end{cases}$$

В новой системе координат уравнение фигуры Φ имеет вид

$$Ax'^2 + Cy'^2 = F'. \quad (3.2.7)$$

I_1 . Пусть $A > 0, C > 0, F' > 0$. В этом случае, положив $a^2 = \frac{F'}{A}, b^2 = \frac{F'}{C}$, уравнение (3.2.7) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad (3.2.8)$$

Таким образом, в случае I_1 фигура Φ является эллипсом.

I_2 . Пусть $A > 0, C < 0, F' > 0$. В этом случае, положив $a^2 = \frac{F'}{A}, b^2 = -\frac{F'}{C}$, уравнение (3.2.7) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad (3.2.9)$$

Таким образом, в случае I_2 фигура Φ является гиперболой.

I_3 . Пусть $A > 0, C < 0, F' = 0$. В этом случае, положив $a^2 = \frac{1}{A}, b^2 = -\frac{1}{C}$, уравнение (3.2.6) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b} \right) \left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} \right) = 0. \quad (3.2.10)$$

Таким образом, в случае I_3 фигура Φ является парой прямых, пересекающихся в начале координат с уравнениями $\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b} = 0$ и $\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 0$.

I_4 . Пусть $A > 0, C > 0, F' < 0$. В этом случае, положив $a^2 = -\frac{F'}{A}, b^2 = -\frac{F'}{C}$, уравнение (3.2.7) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1. \quad (3.2.11)$$

Уравнение (3.2.11) не имеет решений в области действительных чисел, поэтому на плоскости \mathbf{E}^2 фигура Φ есть пустое множество. Тем не менее фигуру с уравнением (3.2.11) принято называть **мнимым эллипсом**, учитывая, что в области комплексных чисел уравнение (3.2.11) имеет решения.

I_5 . Пусть $A > 0, C > 0, F' = 0$. В этом случае, положив $a^2 = \frac{1}{A}, b^2 = \frac{1}{C}$, уравнение (3.2.6) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0. \quad (3.2.12)$$

Уравнение (3.2.12) в области действительных чисел имеет единственное решение $(0, 0)$, поэтому на плоскости \mathbf{E}^2 фигура Φ сводится к точке. В области комплексных чисел левая часть уравнения (3.2.12) распадается на линейные множители

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \left(\frac{x'}{a} + \sqrt{-1} \frac{y'}{b} \right) \left(\frac{x'}{a} - \sqrt{-1} \frac{y'}{b} \right),$$

поэтому фигуру Φ с уравнением (3.2.12), по аналогии со случаем I_3 , принято называть **парой мнимых прямых**, пересекающихся в действительной точке $O'(0,0)$.

Читателю предлагается в качестве упражнения убедиться, что в случае I иных фигур, кроме пяти перечисленных выше, не возникает.

II. Пусть $A \neq 0$, $C = 0$, $E = 0$. Преобразуем левую часть уравнения (3.2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Dx + F &= A \left(x^2 + 2 \frac{D}{A} x + \frac{D^2}{A^2} \right) - \frac{D^2}{A} + F = \\ &= A \left(x + \frac{D}{A} \right)^2 - F'; \quad F' = \frac{D^2}{A} - F. \end{aligned}$$

Произведем параллельный перенос системы координат

$$(O, \vec{i}, \vec{j}) \rightarrow (O', \vec{i}, \vec{j})$$

согласно формулам

$$\begin{cases} x' = x + \frac{D}{A}, \\ y' = y. \end{cases}$$

В новой системе координат уравнение фигуры Φ имеет вид

$$Ax'^2 = F'. \quad (3.2.13)$$

В этом случае возможны следующих 3 варианта.

II₁. Пусть $AF' > 0$. В этом случае, положив $a^2 = \frac{F'}{A}$, уравнение (3.2.13) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x' = \pm a. \quad (3.2.14)$$

Таким образом, в случае II₁ фигура Φ является парой параллельных прямых.

II₂. Пусть $AF' < 0$. В этом случае, положив $a^2 = -\frac{F'}{A}$, уравнение (3.2.13) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} = -1. \quad (3.2.15)$$

В этом случае фигуру Φ принято называть **парой мнимых параллельных прямых**, поскольку в области комплексных чисел уравнение (3.2.15) можно переписать в виде $(x' + \sqrt{-1}a)(x' - \sqrt{-1}a) = 0$.

II₃. Пусть $F' = 0$. В этом случае уравнение (3.2.13) можно записать в виде

$$x'^2 = 0. \quad (3.2.16)$$

Уравнение (3.2.16) задает прямую. Учитывая вторую степень уравнения, фигуру Φ в этом случае принято называть **сдвоенной прямой**.

III. Пусть $A \neq 0, C = 0, E \neq 0$. Преобразуем левую часть уравнения (3.2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F &= A \left(x^2 + 2 \frac{D}{A} x + \frac{D^2}{A^2} \right) - \frac{D^2}{A} + 2Ey + F = \\ &= A \left(x + \frac{D}{A} \right)^2 - 2E \left(y + \frac{D^2}{2EA} - \frac{F}{2E} \right). \end{aligned}$$

Произведем параллельный перенос системы координат

$$(O, \vec{i}, \vec{j}) \rightarrow (O', \vec{i}, \vec{j})$$

согласно формулам

$$\begin{cases} x' = x + \frac{D}{A}, \\ y' = y + \frac{D^2}{2EA^2} - \frac{F}{2E}. \end{cases}$$

В новой системе координат уравнение фигуры Φ имеет вид

$$x'^2 = 2py', \quad (3.2.17)$$

где $p = \frac{E}{A}$. Фигура Φ является параболой.

Зафиксируем итог наших рассуждений в следующей теореме.

Теорема 3.2.1. Для любой фигуры Φ второго порядка на плоскости \mathbf{E}^2 существует прямоугольная система координат Ox , в которой Φ задается одним из следующих уравнений:

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; Φ – эллипс;
- 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; Φ – гипербола;
- 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; Φ – пара пересекающихся прямых;
- 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$; Φ – мнимый эллипс;
- 5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$; Φ – пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной

точке;

- 6) $\frac{x^2}{a^2} = 1$; Φ – пара параллельных прямых;
- 7) $\frac{x^2}{a^2} = -1$; Φ – пара мнимых параллельных прямых;
- 8) $x^2 = 0$; Φ – сдвоенная прямая;
- 9) $y^2 = 2px, p > 0$; Φ – парабола.

Уравнения 1–9 называются **каноническими уравнениями** соответствующих фигур.

Замечание 3.2.1. Используемая в этом параграфе и далее (см. параграфы 3.5, 4.3, 6.9) терминология предполагает при геометрической интерпретации некоторых уравнений выход в комплексную область. Это объясняется тем, что только в таком случае можно последовательно провести одну из основных идей аналитической геометрии о тесной связи фигуры и ее уравнения. Такой подход позволяет, например, различать мнимый эллипс и пару мнимых параллельных прямых, имеющих различные уравнения $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} = -1 \text{ соответственно}\right)$. Если ограничиться действительными решениями этих уравнений, то мы получим в обоих случаях пустую фигуру. Ситуация здесь вполне аналогична той, которая возникает, когда при решении алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами мы учитываем не только вещественные, но и комплексные корни.

§ 3.3. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ И ПАРАБОЛЫ

В этом параграфе мы используем обозначения, введенные в § 3.1, в частности, мы считаем, что эллипс, гипербола и парабола заданы в прямоугольной системе координат каноническими уравнениями (3.1.1, 3.1.3 и 3.1.6) из § 3.1 соответственно.

Определение 3.3.1. Директрисами эллипса и гиперболы называются две прямые Δ_1 и Δ_2 с уравнениями $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$ соответственно. Директрисой параболы называется прямая Δ с уравнением $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 3.3.1).

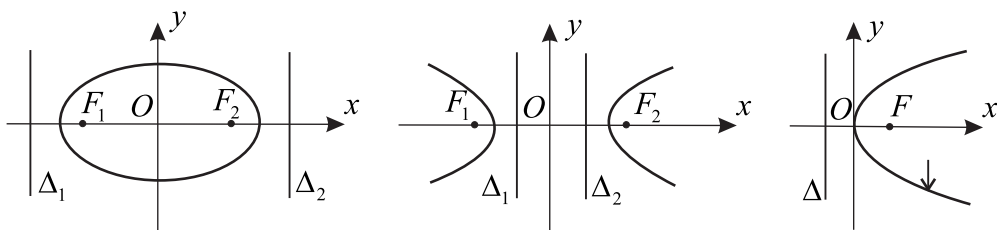


Рис. 3.3.1

Будем говорить, что в случаях эллипса и гиперболы фокус F_i и директриса Δ_i , $i = 1, 2$, соответствуют друг другу. Первое общее свойство трех упомянутых фигур выражается следующим утверждением.

Утверждение 3.3.1. Для любой точки эллипса, гиперболы или параболы отношение ее расстояний до фокуса и соответствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно эксцентриситету.

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса, $r = a + \varepsilon x$ – расстояние от M до левого фокуса F_1 (см. § 3.1), $d = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}$ – расстояние от M

до левой директрисы Δ_1 . Тогда $\frac{r}{d} = \varepsilon$. Для правых фокуса и директрисы доказательство аналогично.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы, $r = |a - \varepsilon x|$ – расстояние от M до правого фокуса F_1 (см. § 3.1), $d = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon}$ – расстояние от M до правой директрисы Δ_1 . Тогда $\frac{r}{d} = \varepsilon$. Для левых фокуса и директрисы доказательство аналогично.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы, тогда $r = \left| x + \frac{p}{2} \right|$ – расстояние от M до фокуса F (см. § 3.1), $d = \left| x + \frac{p}{2} \right|$ – расстояние от M до директрисы Δ . Тогда $\frac{r}{d} = 1 = \varepsilon$. ►

Доказанное свойство является характеристическим для трех фигур.

Утверждение 3.3.2. Пусть Δ – прямая на плоскости \mathbf{E}^2 , F – точка плоскости, не лежащая на Δ , ε – положительное число. Тогда фигура Φ , состоящая из всех точек плоскости, для которых отношение расстояний до точки F и до прямой Δ постоянно и равно ε , либо эллипс, если $\varepsilon < 1$, либо гипербола, если $\varepsilon > 1$, либо парабола, если $\varepsilon = 1$.

Кратко заключение утверждения можно записать следующим образом:

$$\Phi = \{M \in \mathbf{E}^2 \mid \frac{d(M, F)}{d(M, \Delta)} = \varepsilon\} = \begin{cases} \text{эллипс, если } \varepsilon < 1, \\ \text{гипербола, если } \varepsilon > 1, \\ \text{парабола, если } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Выберем прямоугольную систему координат Oxy на плоскости \mathbf{E}^2 так, что ось Oy совпадает с прямой Δ , а ось Ox проходит через точку F перпендикулярно Δ . Тогда координаты заданной точки $F(k, 0)$, где k – расстояние от F до Δ . Если $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости, то уравнение фигуры Φ имеет вид

$$\frac{\sqrt{(x-k)^2 + y^2}}{|x|} = \varepsilon \quad \text{или} \quad (x-k)^2 + y^2 = x^2 \varepsilon^2.$$

Преобразовывая уравнение далее, получим

$$x^2(1 - \varepsilon^2) - 2xk + k^2 + y^2 = 0. \quad (3.3.1)$$

Пусть $\varepsilon \neq 1$. Вынесем множитель $1 - \varepsilon^2$ из слагаемых, содержащих x , и дополним оставшиеся члены до полного квадрата:

$$(1 - \varepsilon^2) \left(x^2 - 2x \frac{k}{1 - \varepsilon^2} + \frac{k^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right) + y^2 = \frac{k^2}{(1 - \varepsilon^2)} - k^2 \quad \text{или}$$

$$\left(x - \frac{k}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k^2 \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}.$$

Введем обозначение $a^2 = \frac{k^2 \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}$ и разделим обе части последнего уравнения на a^2 . Получим в итоге следующее уравнение фигуры Φ :

$$\frac{\left(x - \frac{k}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1. \quad (3.3.2)$$

Очевидно, что (3.3.2) является уравнением эллипса, если $\varepsilon < 1$, и уравнением гиперболы, если $\varepsilon > 1$.

Если в уравнении (1) $\varepsilon = 1$, то его можно переписать в виде $y^2 = 2k(x - \frac{k}{2})$. Последнее уравнение задает параболу. ►

Предлагаем в качестве упражнения убедиться в том, что F и Δ являются для фигуры Φ соответствующими друг другу фокусом и директрисой.

Второе общее свойство эллипса, гиперболы и параболы, которое мы отметим, заключается в том, что при подходящем выборе полярной системы координат все три фигуры можно задать уравнением одного вида.

Пусть Φ – эллипс, гипербола или парабола, F и Δ – соответствующие друг другу фокус и директриса. Зададим полярную систему координат следующим образом. Полюс поместим в точку F , полярный луч выберем перпендикулярным прямой Δ , но не пересекающим ее (рис. 3.3.2).

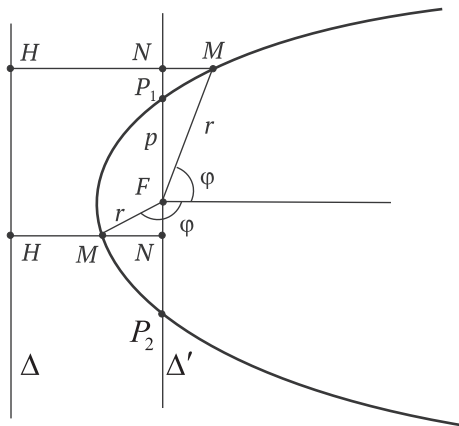


Рис. 3.3.2

Прямая Δ' , проходящая через точку F перпендикулярно полярному лучу, пересекает фигуру Φ в двух симметричных относительно F точках P_1 и P_2 . Пусть P – одна из них. Число $p = |FP|$ называется **фокальным параметром** фигуры Φ . В силу утверждения 3.3.1 для каждой из трех фигур $p = \varepsilon d$, где ε – эксцентриситет фигуры Φ , d – расстояние от F до Δ (или, что то же самое, расстояние между параллельными прямыми Δ и Δ'). Несложные вычисления показывают, что для параболы p совпадает с числом p в ее каноническом уравнении, а для эллипса и гиперболы $p = \frac{b^2}{a}$, где a и b – полуоси. Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка эллипса, параболы или той ветви гиперболы, которая лежит между F и Δ , заданная

своими полярными координатами, N – точка пересечения прямой Δ' и перпендикуляра MN к прямой Δ , проведенного из точки M . Если точка M не совпадает с P_1 или P_2 , то M, N, H – три попарно различные точки одной прямой и возможны два варианта их взаимного расположения: либо N лежит между M и H , либо M лежит между N и H (см. рис. 3.3.2). Расстояние от точки M до директрисы Δ равно $|MH| = |NH| + |MN|$ в первом случае и $|MH| = |NH| - |MN|$ – во втором.

В обоих случаях $|NH| = d = \frac{p}{\varepsilon}$; $|MN| = r \cos \varphi$ в первом случае и $|MN| = -r \cos \varphi$

во втором. В итоге в обоих случаях имеем $|MH| = \frac{p}{\varepsilon} + r \cos \varphi$. В силу утверждения

3.3.1 $\frac{r}{|MH|} = \varepsilon$, или $\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon} + r \cos \varphi} = \varepsilon$. Выражая из последнего равенства r через φ ,

получим окончательно полярное уравнение

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (3.3.3)$$

которое задает эллипс, параболу или одну ветвь гиперболы.

Далее мы найдем уравнения касательных прямых к эллипсу, гиперболе, параболе.

Если ограничиться первой координатной четвертью, то дуга эллипса, лежащая в этой четверти, является графиком функции

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Из школьного курса математики известно, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В рассматриваемом случае

$$f'(x_0) = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} = -\frac{bx_0}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0), \text{ или } \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Поскольку $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, то получим уравнение касательной к эллипсу в точке

$M_0(x_0, y_0)$ в виде

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (3.3.4)$$

Учитывая, что эллипс симметричен относительно координатных осей, нетрудно убедиться, что уравнением (3.3.4) задается касательная к эллипсу в его произвольной точке.

Аналогично получаются уравнения касательных к гиперболе:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad (3.3.5)$$

и параболы:

$$yy_0 = p(x + x_0). \quad (3.3.6)$$

Теперь можно установить так называемые «оптические» свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Утверждение 3.3.3. Касательная в любой точке эллипса или гиперболы составляет равные углы с фокальными радиусами этой точки (рис. 3.3.3).

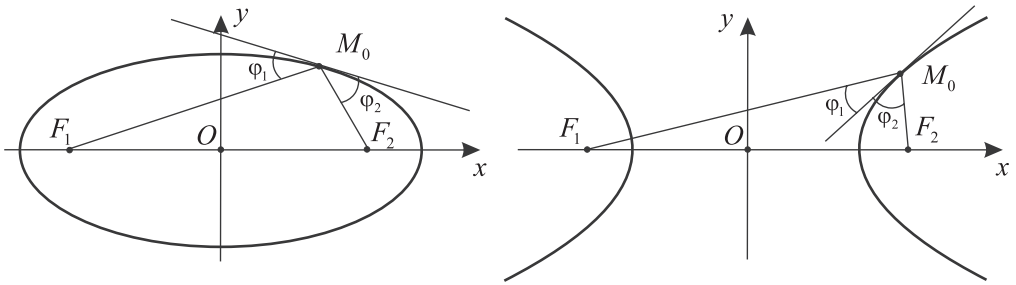


Рис. 3.3.3

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка эллипса. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{F_1M_0}(x_0 + c, y_0)$ и $\overrightarrow{M_0F_2}(c - x_0, -y_0)$, а также направляющий вектор $\vec{m}\left(\frac{y_0}{b^2}, -\frac{x_0}{a^2}\right)$ касательной. Пусть φ_1 и φ_2 – величины углов между $\overrightarrow{F_1M_0}$ и \vec{m} , между $\overrightarrow{M_0F_2}$ и \vec{m} соответственно. Тогда

$$\cos \varphi_1 = \frac{\frac{(x_0 + c)y_0}{b^2} - \frac{x_0 y_0}{a^2}}{|\vec{m}| \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} = \frac{x_0 y_0 (a^2 - b^2) + c y_0 a^2}{a^2 b^2 |\vec{m}| r_1} = \frac{c y_0 (a^2 + c x_0)}{a^2 b^2 |\vec{m}| r_1} = \frac{\varepsilon y_0}{b^2 |\vec{m}|},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\frac{(c - x_0)y_0}{b^2} + \frac{x_0 y_0}{a^2}}{|\vec{m}| \sqrt{(c - x_0)^2 + y_0^2}} = \frac{x_0 y_0 (b^2 - a^2) + c y_0 a^2}{a^2 b^2 |\vec{m}| r_2} = \frac{c y_0 (a^2 - c x_0)}{a^2 b^2 |\vec{m}| r_2} = \frac{\varepsilon y_0}{b^2 |\vec{m}|}.$$

Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_2$. Доказательство в случае гиперболы проводится аналогично. ►

Если считать, что модели эллипса и гиперболы выполнены из зеркального материала, то можно сформулировать физическую (оптическую) интерпретацию доказанных свойств:

- луч, выпущенный из одного фокуса эллипса, отразившись от эллипса, попадает в другой фокус;

• луч, выпущенный из одного фокуса, отразившись от гиперболы, идет по прямой, проходящей через второй фокус и точку отражения.

Утверждение 3.3.4. Касательная в любой точке параболы составляет равные углы с фокальным радиусом этой точки и осью параболы (рис. 3.3.4).

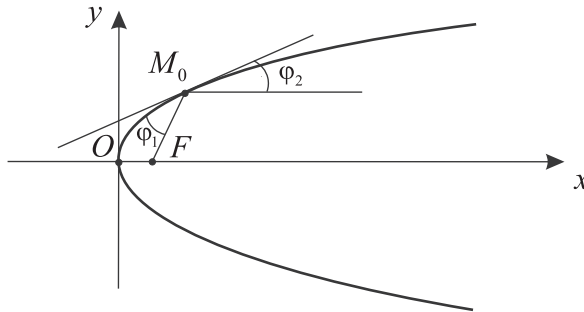


Рис. 3.3.4

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка параболы. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{FM_0}(x_0 - \frac{p}{2}, y_0)$ и направляющий вектор $\vec{m}(y_0, p)$ касательной. Пусть φ_1 и φ_2 – величины углов между $\overrightarrow{FM_0}$ и \vec{m} , между \vec{m} и осью параболы соответственно. Поскольку в рассматриваемом случае ось параболы совпадает с координатной осью Ox , то φ_2 – величина угла между \vec{m} и базисным вектором $\vec{i}(1, 0)$ системы координат. Тогда

$$\cos \varphi_1 = \frac{(x_0 - \frac{p}{2})y_0 + y_0 p}{r |\vec{m}|} = \frac{x_0 y_0 + \frac{p}{2} y_0}{(x_0 + \frac{p}{2}) |\vec{m}|} = \frac{y_0}{|\vec{m}|},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{y_0}{|\vec{m}|}.$$

Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_2$. ►

Физическая (оптическая) интерпретация доказанного свойства параболы следующая: луч, выпущенный из фокуса, отразившись от параболы, идет по прямой, параллельной оси параболы. На этом свойстве основаны конструкции прожекторов, фар, передающих и принимающих антенн, в том числе параболических телевизионных.

Отметим, что помимо приведенного существуют и другие доказательства оптических свойств, в том числе и чисто геометрические, не использующие уравнений. Вы можете предложить свой вариант, а также найти различные доказательства в математической литературе или Интернете.

§ 3.4. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые часто встречающиеся типы пространственных фигур и приведем примеры таких фигур, которые задаются уравнениями второй степени, т. е. являются фигурами второго порядка в пространстве.

3.4.1. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Пусть $Oxyz$ – прямоугольная система координат в пространстве E^3 , Φ' – фигура на координатной плоскости Oxz (рис. 3.4.1), заданная уравнением

$$F(x, z) = 0. \quad (3.4.1)$$

Обозначим Φ фигуру в пространстве, которая получается вращением плоской фигуры Φ' вокруг оси Oz (рис. 3.4.2).

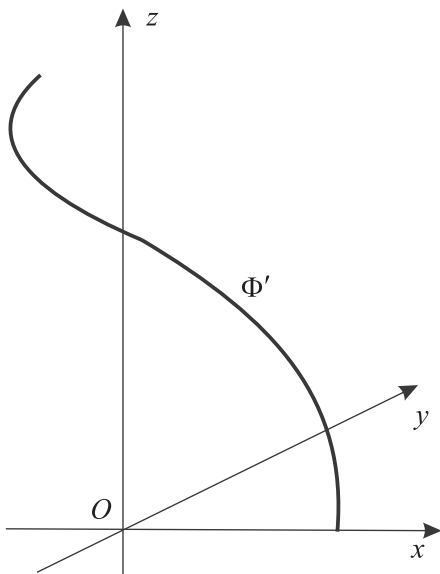


Рис. 3.4.1

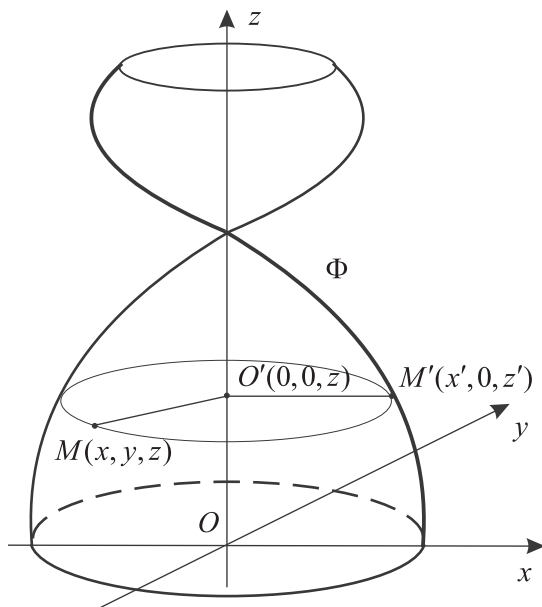


Рис. 3.4.2

Зная уравнение (3.4.1) фигуры Φ' , можно получить уравнение фигуры Φ . Точка $M(x, y, z)$ пространства E^3 тогда и только тогда принадлежит фигуре Φ , когда она получена вращением вокруг оси Oz некоторой точки $M'(x', 0, z')$ фигуры Φ' (см. рис. 3.4.2). Поскольку M и M' лежат в одной плоскости, параллельной плоскости Oxy , то $z = z'$. Кроме того, так как M и M' лежат на одной окружности с центром в точке $O'(0, 0, z)$ и радиусом $r = d(M, Oz) = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $x' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Знак плюс или минус для x' выбирается в зависимости от того, в какой полуплоскости относительно оси Oz лежит точка M' . Таким образом,

$$M(x, y, z) \in \Phi \Leftrightarrow M'(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \in \Phi' \Leftrightarrow F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Следовательно, уравнение фигуры Φ , полученной вращением вокруг оси Oz плоской фигуры Φ' с уравнением (3.4.1), имеет вид

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (3.4.2)$$

Сечение фигуры вращения Φ любой плоскостью, проходящей через ось вращения Oz , есть плоская фигура Ψ , симметричная относительно оси вращения, которая называется **меридианом** фигуры вращения Φ (иногда меридианом называют каждую из двух половинок фигуры Ψ , лежащую в одной полуплоскости от-

носителю прямой Oz). Очевидно, что фигура Φ может быть получена вращением вокруг оси Oz любого своего меридиана, и при повороте вокруг оси Oz на любой угол каждый меридиан переходит в некоторый другой меридиан. Непустое сечение фигуры Φ плоскостью, перпендикулярной оси вращения, называется **параллелью** фигуры вращения Φ . Любая параллель есть объединение концентрических окружностей (возможно, нулевого радиуса). Если математической моделью поверхности земного шара считать сферу (фигуру вращения с осью вращения, проходящей через полюса), то математическая терминология совпадает с географической.

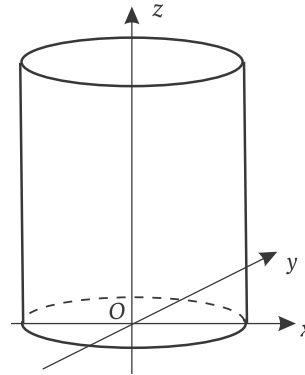


Рис. 3.4.3

Рассмотрим примеры фигур вращения.

1. Пусть Φ' – прямая в плоскости Oxz с уравнением $x = a$, $a > 0$. Фигура Φ , полученная вращением прямой Φ' вокруг оси Oz , называется **круговым цилиндром** (рис. 3.4.3).

Круговой цилиндр, согласно (3.4.2), можно задать уравнением

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Меридианы кругового цилиндра – это прямые (образующие цилиндра), параллельные – окружности радиусом a .

2. Пусть Φ' – прямая в плоскости Oxz с уравнением $z = \frac{c}{a}x$, $a, c > 0$. Фигура Φ , полученная вращением прямой Φ' вокруг оси Oz , называется **круговым конусом второго порядка** (рис. 3.4.4). Круговой конус второго порядка можно задать уравнением

$$z = \frac{c}{a}(\pm\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

3. Пусть Φ' – эллипс в плоскости Oxz с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Фигура Φ , полученная вращением эллипса Φ' вокруг оси Oz , называется **эллипсоидом вращения** (рис. 3.4.5).

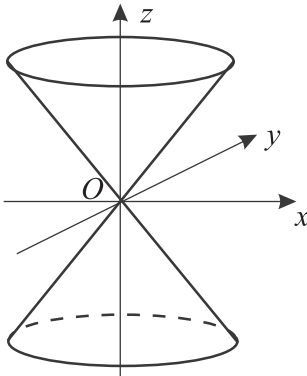


Рис. 3.4.4

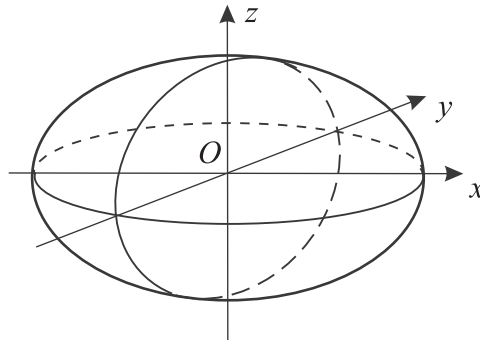


Рис. 3.4.5

Эллипсоид вращения можно задать уравнением

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Меридианы эллипсоида вращения – эллипсы, канонические уравнения которых совпадают с уравнением исходного эллипса Φ' , параллели – окружности, радиусы которых принимают все значения на отрезке $[0; a]$.

4. Пусть Φ' – гипербола в плоскости Oxz с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Фигура Φ , полученная вращением гиперболы Φ' вокруг ее мнимой оси Oz , называется **однополостным гиперboloидом вращения** (рис. 3.4.6).

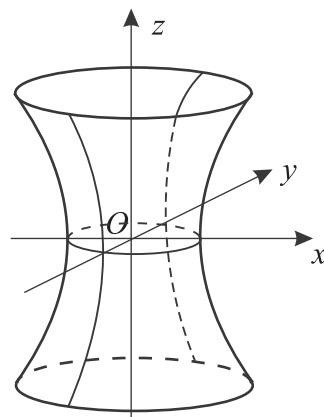


Рис. 3.4.6

Однополостный гиперboloид вращения можно задать уравнением

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Меридианы однополостного гиперboloида вращения – гиперболы, канонические уравнения которых совпадают с уравнением исходной гиперболы Φ' , параллели – окружности, радиусы которых принимают все значения на луче $[a; +\infty)$. Параллель наименьшего радиуса a , лежащая в плоскости Oxy , называется **горловой окружностью**.

5. Пусть Φ' – гипербола в плоскости Oxz , сопряженная гиперболе из предыдущего примера, с каноническим уравнением $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Фигура Φ , полученная вращением гиперболы Φ' вокруг ее действительной оси Oz , называется **двуполостным гиперboloидом вращения** (рис. 3.4.7). Двуполостный гиперboloид вращения можно задать уравнением

$$-\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Двуполостный гиперboloид состоит из двух частей («полостей») Φ^+ и Φ^- , расположенных в разных полупространствах относительно координатной плоскости Oxy . Точки $A_1(0, 0, -c) \in \Phi^-$ и $A_2(0, 0, c) \in \Phi^+$ называются **вершинами** гиперboloида. Меридианы двуполостного гиперboloида вращения – гиперболы, канонические уравнения которых совпадают с уравнением исходной гиперболы Φ' , параллели – окружности, радиусы которых принимают все значения на луче $[0; +\infty)$.

6. Пусть Φ' – парабола в плоскости Oxz с каноническим уравнением $x^2 = 2pz$, $p > 0$. Фигура Φ , полученная вращением параболы Φ' вокруг ее оси Oz , называется **эллиптическим параболоидом вращения** (рис. 3.4.8).

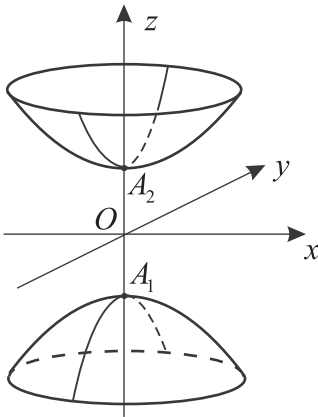


Рис. 3.4.7

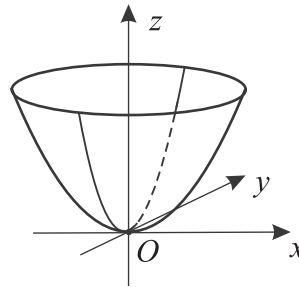


Рис. 3.4.8

Эллиптический параболоид вращения можно задать уравнением

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2pz \text{ или } \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z.$$

Точка $O(0,0,0) \in \Phi$ называется **вершиной** параболоида. Меридианы эллиптического параболоида вращения – параболы, канонические уравнения которых совпадают с уравнением исходной параболы Φ' , параллели – окружности, радиусы которых принимают все значения на луче $[a; +\infty)$.

Далее нас будут интересовать пространственные фигуры, которые получаются из вышеприведенных фигур вращения путем *сжатия* пространства E^3 к плоскости Oxz вдоль координатной оси Oy . Преобразование сжатия пространства определяется аналогично сжатию плоскости (§ 3.1).

Определение 3.4.1. *Сжатием* пространства E^3 к плоскости Oxz вдоль координатной оси Oy называется отображение $f: E^3 \rightarrow E^3$, которое на произвольную точку пространства $M(x, y, z)$, заданную своими координатами, действует по правилу

$$M(x, y, z) \mapsto M'(x, ky, z), \quad (3.4.3)$$

где k – фиксированное вещественное положительное число, которое называется **коэффициентом сжатия** (рис. 3.4.9).

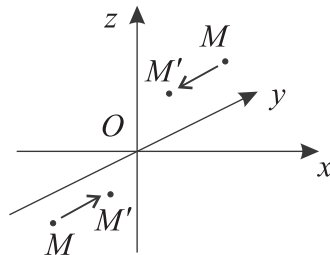


Рис. 3.4.9

Аналогично случаю плоскости легко доказывается, что если фигура Φ в пространстве задается уравнением $F(x, y, z) = 0$, то фигура $\Phi' = f(\Phi)$, полученная из Φ сжатием (3.4.3), имеет уравнение $F\left(x, \frac{y}{k}, z\right) = 0$.

Таким образом, применяя сжатие (3.4.3) к фигурам вращения, примеры которых приведены выше, получим следующие фигуры:

- из *кругового цилиндра* с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ получаем **эллиптический цилиндр** с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b = ka$;

- из *кругового конуса* с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ получаем **конус второго порядка** с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $b = ka$;

- из *эллипсоида вращения* с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ получаем **эллипсоид** с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $b = ka$; если полуоси эллипсоида a, b, c попарно различны, то эллипсоид называется **трехосным**;

- из *однополостного гиперболоида вращения* с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ получаем **однополостный гиперболоид** с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $b = ka$;

- из *двуполостного гиперболоида вращения* с уравнением $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ получаем **двуполостный гиперболоид** с уравнением $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $b = ka$;

- из *эллиптического параболоида вращения* с уравнением $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$, $p > 0$, получаем **эллиптический параболоид** с уравнением $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $q = k^2 p$.

При сжатии фигур вращения их форма изменяется непринципиально: каждая окружность радиусом a , составляющая параллель, превращается в эллипс, одна из полуосей которого равна a , а другая полуось – ka . Поэтому рисунки, приведенные выше для фигур вращения, можно отнести и к вновь полученным фигурам.

3.4.2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Пусть Φ' – фигура, лежащая в плоскости π , \vec{a} – ненулевой вектор, не параллельный плоскости π . Рассмотрим всевозможные прямые $\Delta(M, \vec{a})$ с направляющим вектором \vec{a} , начальные точки которых M пробегают множество Φ' . Объединение Φ этих параллельных прямых называется **цилиндрической** фигурой (рис. 3.4.10).

При этом Φ' называется **базой** фигуры Φ , а прямые $\Delta(M, \vec{a})$ – ее **образующими**. Уравнение цилиндрической фигуры можно получить следующим образом. Выберем аффинную систему координат $Oxuz$ в пространстве E^3 так, чтобы коор-

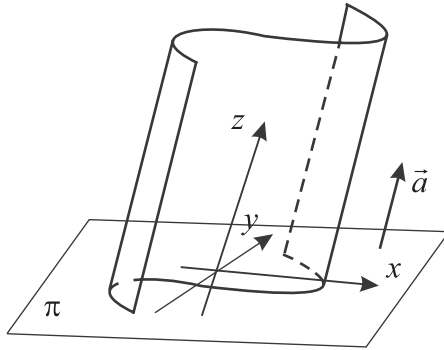


Рис. 3.4.10

динатная плоскость Oxy совпадала с плоскостью π , а ось Oz имела направляющий вектор \vec{a} . Пусть

$$F(x, y) = 0 \quad (3.4.4)$$

уравнение базы Φ' в системе координат Oxy . Очевидно, что точка $M(x, y, z)$ пространства E^3 принадлежит цилиндрической фигуре Φ тогда и только тогда, когда ее проекция $M'(x, y, 0) = \text{pr}_{Oxy} M$ на плоскость Oxy параллельно оси Oz принадлежит фигуре Φ' . Следовательно, в выбранной системе координат уравнение цилиндрической фигуры Φ имеет вид (3.4.4), т. е. совпадает с уравнением базы. Таким образом, уравнение (3.4.4) задает базу цилиндрической фигуры Φ' , если это уравнение рассматривать относительно системы координат Oxy на плоскости π , и это же уравнение задает цилиндрическую фигуру Φ , если его рассматривать относительно системы координат $Oxyz$ в пространстве E^3 .

Рассмотрим некоторые примеры цилиндрических фигур. Все уравнения, приведенные ниже, рассматриваются относительно прямоугольной системы координат в пространстве $Oxyz$.

1. Пространственная фигура с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.4.5)$$

называется **эллиптическим цилиндром** (рис. 3.4.11). Базой эллиптического цилиндра является эллипс на плоскости Oxy с каноническим уравнением (3.4.5), образующие цилиндра параллельны оси Oz .

2. Пространственная фигура с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.4.6)$$

называется **гиперболическим цилиндром** (рис. 3.4.12). Базой гиперболического цилиндра является гипербола на плоскости Oxy с каноническим уравнением (3.4.6). Образующие цилиндра параллельны оси Oz .

3. Пространственная фигура с уравнением

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \quad (3.4.7)$$

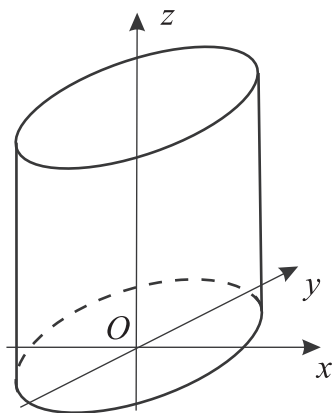


Рис. 3.4.11

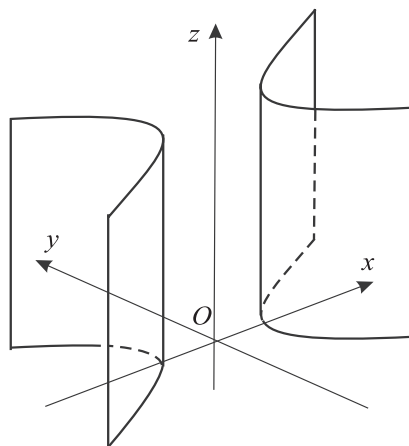


Рис. 3.4.12

называется **параболическим цилиндром** (рис. 3.4.13).

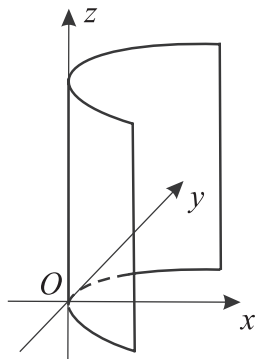


Рис. 3.4.13

Базой параболического цилиндра является парабола на плоскости Oxy с каноническим уравнением (3.4.7), образующие цилиндра параллельны оси Oz .

3.4.3. КОНИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Пусть S – фиксированная точка пространства E^3 . **Конической фигурой с вершиной S** называется любая фигура, состоящая из прямых, проходящих через точку S (рис. 3.4.14).

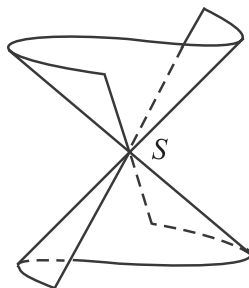


Рис. 3.4.14

В качестве примеров таких фигур рассмотрим фигуры, которые задаются уравнениями вида

$$F(x, y, z) = 0, \quad (3.4.8)$$

где $F(x, y, z)$ – однородная функция степени k , $k \in \mathbf{N}$, т. е. такая функция трех переменных, для которой выполняется условие

$$F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (3.4.9)$$

Если $Oxuz$ – аффинная система координат в пространстве \mathbf{E}^3 , то однородное уравнение (3.4.8) задает коническую фигуру Φ с вершиной в начале координат $O(0, 0, 0)$ либо точку O . Действительно, вместе с каждой точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \neq O$, фигуры Φ этой фигуре принадлежит вся прямая $\Delta = \Delta(O, M_0)$, проходящая через точки O и M_0 : любая точка прямой Δ имеет вид $M(tx_0, ty_0, tz_0)$, $t \in \mathbf{R}$, и, следовательно, $M \in \Delta$, так как $F(tx_0, ty_0, tz_0) = t^k F(x_0, y_0, z_0) \equiv 0$. Примером такой фигуры служит конус второго порядка с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, определенный в п. 3.4.1.

§ 3.5. ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 3.5.1. *Фигурой второго порядка в пространстве \mathbf{E}^3 называется фигура, которая в некотором аффинном репере может быть задана уравнением второй степени с тремя неизвестными.*

Таким образом, Φ – фигура второго порядка, если существует аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, в котором Φ задается уравнением

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

В уравнении (3.5.1) a_{ij}, a_k, a_0 – фиксированные вещественные числа, x, y, z – неизвестные. Поскольку (3.5.1) – уравнение второй степени, среди коэффициентов a_{ij} есть ненулевые. Это условие можно записать в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.2)$$

Наша цель в этом параграфе – перечислить все пространственные фигуры второго порядка. Их примерами служат поверхности, рассматриваемые в § 3.4: эллипсоиды, гиперboloиды, эллиптические параболоиды, цилиндры, базы которых есть плоские фигуры второго порядка, а также конусы второго порядка. Еще один пример – фигура, которая в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задается уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0. \quad (3.5.3)$$

Фигура, имеющая уравнение (3.5.3), называется **гиперболическим параболоидом**. Для выяснения формы гиперболического параболоида применим один из способов исследования пространственных фигур, который называется **методом сечений**. Такой метод используется, например, в картографии: для показа рельефа гористой местности (рис. 3.5.1) на географических картах изображают **линии уровня**, состоящие из точек поверхности Земли, лежащих на одной высоте (рис. 3.5.2).

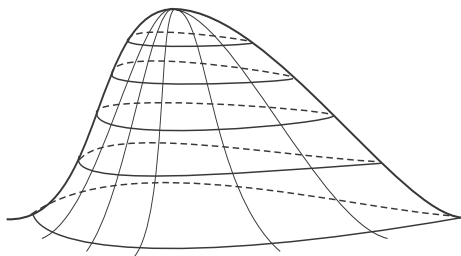


Рис. 3.5.1

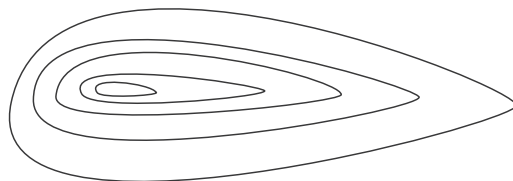


Рис. 3.5.2

Суть метода сечений в геометрии заключается в следующем. Пусть в пространстве E^3 с фиксированной прямоугольной системой координат $Oxyz$ задана поверхность Φ . Изучаемую поверхность пересекают несколькими плоскостями, параллельными одной из координатных плоскостей, и на этой координатной плоскости изображают ортогональные проекции полученных в сечении линий. Полученное семейство линий называется **картой сечений**. Построив карты сечений на координатных плоскостях Oxy , Oxz , Oyz , можно по их виду представить форму поверхности Φ .

Рассмотрим сначала в качестве иллюстрации этого метода карты сечений уже известной фигуры – однополостного гиперboloида Φ с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Пусть π – плоскость, параллельная координатной плоскости Oxy с уравнением $z = h$. Тогда сечение $\Phi \cap \pi$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad (3.5.4)$$

Система (3.5.4), очевидно, эквивалентна системе

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \text{ где } a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}. \quad (3.5.5)$$

Вторая система уравнений в (3.5.5) показывает, что интересующее нас сечение $\Phi \cap \pi$ может быть получено так же, как пересечение $\Phi_1 \cap \pi$, где Φ_1 – пространственная фигура с уравнением $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$. Как отмечено в § 3.4, Φ_1 – эллиптический цилиндр с базой, являющейся эллипсом на плоскости Oxy с каноническим

уравнением $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ и с образующими, параллельными оси Oz . Поскольку секущая плоскость π перпендикулярна образующим цилиндра, то проекция сечения $\Phi \cap \pi$ совпадает с базой цилиндра. Таким образом, при значениях h , равных h_1, h_2, h_3 , таких, что $h_1 = 0 < |h_2| < |h_3|$, карта сечений представляет три гомотетичных эллипса. При $h = h_1 = 0$ сечение совпадает с горловым эллипсом однополостного гиперboloида (рис. 3.5.3).

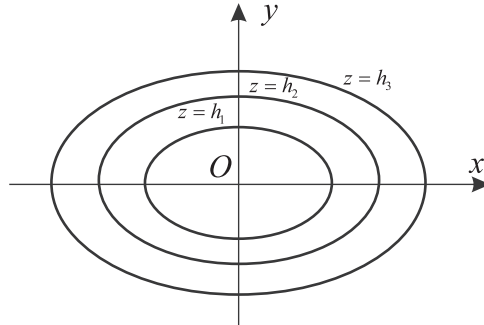


Рис. 3.5.3

Пусть теперь π – плоскость, параллельная координатной плоскости Oxz с уравнением $y = h$. Тогда сечение $\Phi \cap \pi$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h, \end{cases} \quad (3.5.6)$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases} \quad (3.5.7)$$

Проведенные выше рассуждения показывают, что проекция сечения $\Phi \cap \pi$ на плоскость Oxz имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

При $|h| = b$ это уравнение задает пару пересекающихся прямых Δ_1, Δ_2 с уравнениями $z = \pm \frac{c}{a}x$; при $0 \leq |h| < b$ – гиперболу с асимптотами Δ_1, Δ_2 , действительной осью Ox и полуосями $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$; при $|h| > b$ – гиперболу с асимптотами Δ_1, Δ_2 , действительной осью Oz и полуосями $a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}$, $c_1 = c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}$ (рис. 3.5.4).

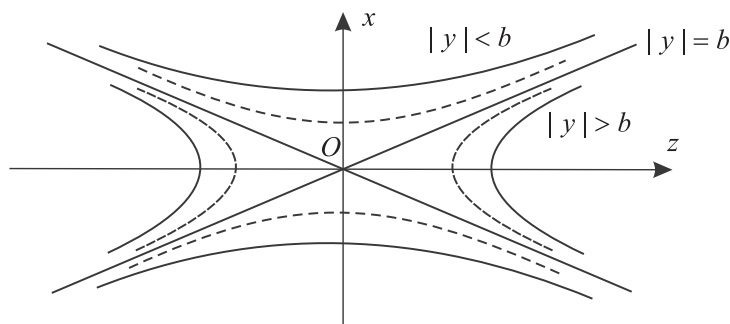


Рис. 3.5.4

В случае сечений $\Phi \cap \pi$ плоскостями π с уравнениями вида $x = h$ карта сечений получается аналогичной предыдущему случаю.

Теперь построим карты сечений гиперболического параболоида Φ с уравнением (3.5.3).

Карта сечений $\Phi \cap \pi$ плоскостями π с уравнениями вида $z = h$ есть семейство фигур на плоскости Oxy , зависящих от параметра h , с уравнениями $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h$.

При $h = 0$ – это пара пересекающихся прямых Δ_1, Δ_2 с уравнениями $y = \pm \sqrt{\frac{q}{p}} x$. При

$h > 0$ – семейство гипербол с асимптотами Δ_1, Δ_2 , действительной осью Ox и полуосями $\sqrt{2ph}$, $\sqrt{2qh}$. При $h < 0$ – семейство гипербол с асимптотами Δ_1, Δ_2 , действительной осью Oy и полуосями $\sqrt{-2ph}$, $\sqrt{-2qh}$ (рис. 3.5.5).

Карта сечений $\Phi \cap \pi$ плоскостями π с уравнениями вида $x = h$ есть семейство равных парабол (с одним и тем же фокальным параметром q) на плоскости Oyz с уравнениями $y^2 = -2q \left(z - \frac{h^2}{2p} \right)$ (рис 3.5.6).

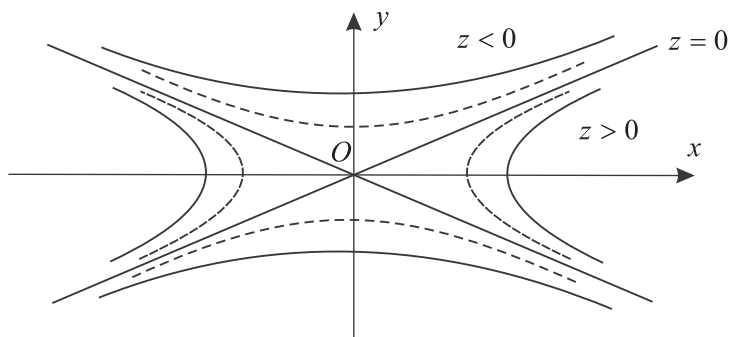


Рис. 3.5.5

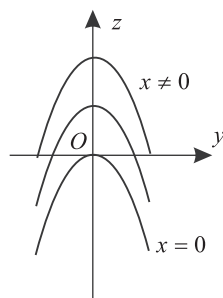


Рис. 3.5.6

Карта сечений $\Phi \cap \pi$ плоскостями π с уравнениями вида $y = h$ есть семейство равных парабол (с одним и тем же фокальным параметром p) на плоскости Oxz

с уравнениями $y^2 = 2p \left(z + \frac{h^2}{2q} \right)$ (рис 3.5.7).

Имея карты сечений на координатных плоскостях, можно представить форму гиперболического параболоида, нарисовав следующие сечения. Сначала – две параболы, получающиеся сечениями плоскостями $x = \pm h$, $h > 0$. Затем – гиперболу (пересекающую нарисованные параболы), получающуюся сечением плоскостью $z = -h$, $h > 0$. И, наконец, параболу, лежащую в плоскости Oxz , проходящую через вершины двух первых парабол. Полученный контур дает достаточно хорошее представление о форме гиперболического параболоида в окрестности начала координат, напоминающей седло (рис.3.5.8).

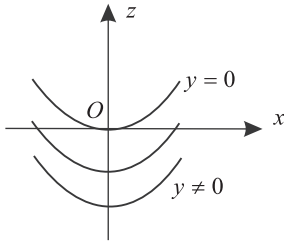


Рис. 3.5.7

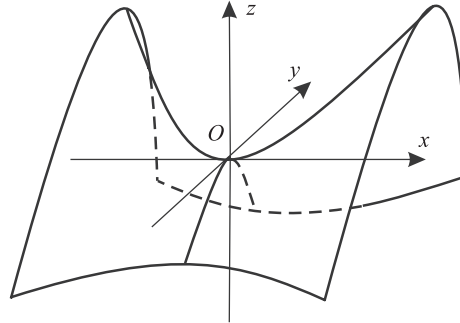


Рис. 3.5.8

Возвратимся к общему уравнению (3.5.1) фигуры второго порядка в пространстве.

Утверждение 3.5.1. *Фигура Φ , которая в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задана уравнением (3.5.1) с условием (3.5.2), в любом другом репере $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ может быть задана уравнением такого же типа.*

Доказательство этого утверждения мы опускаем, поскольку оно совершенно аналогично доказательству утверждения 3.2.1. Нужно использовать матричные обозначения, такие же, как в § 3.2, заменив при этом матричный размер 2 на размер 3. В частности, при переходе от одного репера к другому матрица квадратичной части уравнения изменяется по формуле $A \rightarrow A' = S^t A S$, где S – матрица перехода от базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ к базису $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$.

Из утверждения 3.5.1 следует, что для получения всех фигур второго порядка в пространстве можно зафиксировать один репер и рассматривать фигуры, заданные всевозможными уравнениями вида (3.5.1) в данном репере.

Итак, пусть фигура второго порядка Φ имеет уравнение (3.5.1) в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Попытаемся упростить уравнение фигуры Φ , переходя к другому ортонормированному реперу $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. В этом случае матрица

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

есть матрица перехода от ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ к ортонормированному базису $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, т. е. выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= s_{11}\vec{i} + s_{21}\vec{j} + s_{31}\vec{k}, \\ \vec{j}' &= s_{12}\vec{i} + s_{22}\vec{j} + s_{32}\vec{k}, \\ \vec{k}' &= s_{13}\vec{i} + s_{23}\vec{j} + s_{33}\vec{k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S^t S = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поскольку элементы матрицы $S^t S$ – это попарные скалярные произведения базисных векторов $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$. Квадратная $n \times n$ -матрица S , удовлетворяющая условию $S^t S = E_n$, называется **ортогональной матрицей**. В курсе линейной алгебры (см. например, [2, теорема 24.12]) доказывается, что для любой вещественной симметрической матрицы A существует ортогональная матрица S такая, что $S^t A S$ – диагональная матрица, т. е.

$$S^t A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}.$$

В рассматриваемой ситуации это означает, что для фигуры второго порядка Φ существует ортонормированный репер $(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ (с матрицей S перехода от базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ к базису $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$), в котором Φ имеет уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a = 0, \quad (3.5.8)$$

причем хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отлично от нуля. Далее рассмотрим различные возможные варианты.

I. Каждое из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ не равно нулю. Преобразуем уравнение (3.5.8), выделяя полные квадраты, следующим образом:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left(x'^2 + 2 \frac{a'_1}{\lambda_1} x' + \frac{a'^2_1}{\lambda_1^2} \right) - \frac{a'^2_1}{\lambda_1} + \lambda_2 \left(y'^2 + 2 \frac{a'_2}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_2}{\lambda_2^2} \right) - \frac{a'^2_2}{\lambda_2} + \\ & + \lambda_3 \left(z'^2 + 2 \frac{a'_3}{\lambda_3} z' + \frac{a'^2_3}{\lambda_3^2} \right) - \frac{a'^2_3}{\lambda_3} + a = 0; \\ & \lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z' + \frac{a'_3}{\lambda_3} \right)^2 = d. \end{aligned}$$

Выполним параллельный перенос репера $(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ в соответствии с формулами

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}, \\ z'' = z' + \frac{a'_3}{\lambda_3}. \end{cases}$$

Получим ортонормированный репер $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, в котором фигура Φ имеет уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = d. \quad (3.5.9)$$

I_1 . Пусть в уравнении (3.5.9) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, $d > 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$, $c = \sqrt{\frac{d}{\lambda_3}}$, то уравнение (3.5.9) переписется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1. \quad (3.5.10)$$

Это означает, что фигура Φ – эллипсоид.

I_2 . Пусть в уравнении (3.5.9) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, $d < 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_2}}$, $c = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_3}}$, то уравнение (3.5.9) переписется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = -1. \quad (3.5.11)$$

Уравнение (3.5.11) не имеет решений в области вещественных чисел. Однако это уравнение имеет решения в области комплексных чисел. По аналогии со случаем мнимого эллипса в двумерной ситуации фигуру Φ с уравнением (3.5.11) принято называть **мнимым эллипсоидом**.

I_3 . Пусть в уравнении (3.5.9) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, $d > 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$, $c = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_3}}$, то уравнение (3.5.9) переписется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1. \quad (3.5.12)$$

Это означает, что фигура Φ – однополостный гиперболоид.

I_4 . Пусть в уравнении (3.5.9) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$, $d > 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_2}}$, $c = \sqrt{\frac{d}{\lambda_3}}$, то уравнение (3.5.9) переписется в виде

$$-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1. \quad (3.5.13)$$

Это означает, что фигура Φ – двуполостный гиперболоид.

I_5 . Пусть в уравнении (3.5.9) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, $d = 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$, $c = \sqrt{-\frac{1}{\lambda_3}}$, то уравнение (3.5.9) переписется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 0. \quad (3.5.14)$$

Это означает, что фигура Φ – конус второго порядка.

I₆. Пусть в уравнении (3.5.9) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, $d = 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$, $c = \sqrt{\frac{1}{\lambda_3}}$, то уравнение (3.5.9) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 0. \quad (3.5.15)$$

Уравнение (3.5.15) имеет единственное решение в области вещественных чисел – $(0,0,0)$. Однако, учитывая, что в области комплексных чисел уравнение (3.5.15) имеет ненулевые решения, фигуру Φ с уравнением (3.5.15) принято называть **мнимым конусом второго порядка** (с вещественной вершиной $O(0,0,0)$).

Выбирая другие комбинации знаков для чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d$, нетрудно убедиться, что в случае I новых типов фигур, по сравнению с рассмотренными выше, не возникает.

II. Переходим к случаю, когда в уравнении (3.5.8) среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одно равно нулю, а два других – ненулевые. Не умаляя общности, будем считать, что $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, т. е. уравнение (3.5.8) имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a = 0. \quad (3.5.16)$$

Преобразуем уравнение (3.5.16) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{a_2'^2}{\lambda_2} + 2a'_3 z' + a &= 0; \\ \lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 &= -2a'_3 z' + d. \end{aligned}$$

Выполним параллельный перенос репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в соответствии с формулами

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}, \\ z'' = z'. \end{cases}$$

Получим ортонормированный репер $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, в котором фигура Φ имеет уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = -2a'_3 z'' + d. \quad (3.5.17)$$

II₁. Пусть в уравнении (3.5.17) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $a'_3 = 0$, $d > 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$, то уравнение (3.5.17) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1. \quad (3.5.18)$$

Поскольку речь идет о пространственной фигуре, делаем вывод, что фигура Φ – эллиптический цилиндр.

Π_2 . Пусть в уравнении (3.5.17) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $a'_3 = 0$, $d < 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}$, то уравнение (3.5.17) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1. \quad (3.5.19)$$

Фигура Φ с уравнением (3.5.19) называется **мнимым эллиптическим цилиндром**.

Π_3 . Пусть в уравнении (3.5.17) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $a'_3 = 0$, $d > 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_2}}$, то уравнение (3.5.17) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1. \quad (3.5.20)$$

Это означает, что фигура Φ – гиперболический цилиндр.

Π_4 . Пусть в уравнении (3.5.17) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $a'_3 = 0$, $d = 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}}$, то уравнение (3.5.17) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0. \quad (3.5.21)$$

Это означает, что фигура Φ – пара плоскостей с уравнениями $\frac{x''}{a} \pm \frac{y''}{b} = 0$. Эти плоскости различны, и они пересекаются по прямой, совпадающей с осью $O'z''$.

Π_5 . Пусть в уравнении (3.5.17) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $a'_3 = 0$, $d = 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$, то уравнение (3.5.17) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0. \quad (3.5.22)$$

Фигура Φ с уравнением (3.5.22) называется **парой мнимых пересекающихся плоскостей** (они пересекаются по прямой, совпадающей с осью $O'z''$).

Π_6 . Пусть в уравнении (3.5.17) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $a'_3 < 0$. Выполним параллельный перенос репера $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ в соответствии с формулами

$$\begin{cases} X = x'', \\ Y = y'', \\ Z = z'' - \frac{d}{2a'_3}. \end{cases}$$

Тогда если ввести обозначения $p = -\frac{a'_3}{\lambda_1} > 0$, $q = -\frac{a'_3}{\lambda_2} > 0$, то уравнение (3.5.17) перепишется в виде

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z. \quad (3.5.23)$$

Это означает, что фигура Φ – эллиптический параболоид.

II₇. Пусть в уравнении (3.5.17) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $a'_3 < 0$. Выполним параллельный перенос репера $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ в соответствии с формулами

$$\begin{cases} X = x'', \\ Y = y'', \\ Z = z'' - \frac{d}{2a'_3}. \end{cases}$$

Тогда если ввести обозначения $p = -\frac{a'_3}{\lambda_1} > 0$, $q = \frac{a'_3}{\lambda_2} > 0$, то уравнение (3.5.17) перепишется в виде

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z. \quad (3.5.24)$$

Это означает, что фигура Φ – гиперболический параболоид.

В качестве упражнения предлагаем убедиться, что другие комбинации знаков для чисел λ_1 , λ_2 , a'_3 , d новых фигур в случае II не дают.

III. Переходим к оставшемуся случаю, когда в уравнении (3.5.8) только одно из чисел λ_1 , λ_2 , λ_3 отлично от нуля. Будем считать, что $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тогда уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a = 0.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\lambda_1 \left(x'^2 + 2 \frac{a'_1}{\lambda_1} x' + \frac{a_1'^2}{\lambda_1^2} \right) - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a = 0;$$

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 = -2a'_2 y' - 2a'_3 z' + d.$$

Выполним параллельный перенос репера $(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ в соответствии с формулами

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}, \\ y'' = y', \\ z'' = z'. \end{cases}$$

Получим ортонормированный репер $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, в котором фигура Φ имеет уравнение

$$\lambda_1 x''^2 = -2a'_2 y'' - 2a'_3 z'' + d. \quad (3.5.25)$$

III₁. Пусть в уравнении (3.5.25) $\lambda_1 > 0$, $a'_2 = a'_3 = 0$, $d > 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$, то уравнение (3.5.25) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} = 1. \quad (3.5.26)$$

Это означает, что фигура Φ – пара параллельных плоскостей с уравнениями $x'' = \pm a$.

III₂. Пусть в уравнении (3.5.25) $\lambda_1 > 0$, $a'_2 = a'_3 = 0$, $d < 0$. Тогда если ввести обозначения $a = \sqrt{-\frac{d}{\lambda_1}}$, то уравнение (3.5.25) перепишется в виде

$$\frac{x''^2}{a^2} = -1. \quad (3.5.27)$$

Фигура Φ с уравнением (3.5.27) называется **парой мнимых параллельных плоскостей**.

III₃. Пусть в уравнении (3.5.25) $a'_2 = a'_3 = d = 0$. Тогда уравнение (3.5.25) перепишется в виде

$$x''^2 = 0. \quad (3.5.28)$$

Фигура Φ с уравнением (3.5.28) называется **сдвоенной плоскостью**.

III₄. Пусть в уравнении (3.5.25) хотя бы одно из чисел a'_2 , a'_3 отлично от нуля. Повернем систему координат $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ вокруг оси $O'x''$ на угол φ , такой, что $\cos \varphi = \frac{a'_2}{\sqrt{a'^2_2 + a'^2_3}}$, $\sin \varphi = \frac{a'_3}{\sqrt{a'^2_2 + a'^2_3}}$. Формулы преобразования координат в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} x'' = X, \\ y'' = Y \frac{a'_2}{\sqrt{a'^2_2 + a'^2_3}} - Z \frac{a'_3}{\sqrt{a'^2_2 + a'^2_3}}, \\ z'' = Y \frac{a'_3}{\sqrt{a'^2_2 + a'^2_3}} + Z \frac{a'_2}{\sqrt{a'^2_2 + a'^2_3}}. \end{cases}$$

Тогда уравнение (3.5.25) перепишется в виде

$$X^2 = -2\sqrt{a'^2_2 + a'^2_3} Y + d. \quad (3.5.29)$$

Очевидно, что фигура Φ с уравнением (3.5.29) является параболическим цилиндром.

Подводя итог проведенным выкладкам, сформулируем теорему, описывающую фигуры второго порядка в пространстве.

Теорема 3.5.1. Для любой фигуры второго порядка Φ в пространстве E^3 существует прямоугольная система координат $Oxuz$, в которой фигура Φ имеет одно из следующих уравнений:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \Phi - \text{эллипсоид};$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1; \Phi - \text{мнимый эллипсоид};$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \Phi - \text{однополостный гиперболоид};$$

$$4) -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \Phi - \text{двуполостный гиперболоид};$$

$$5) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; \Phi - \text{конус второго порядка};$$

$$6) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0; \Phi - \text{мнимый конус второго порядка};$$

$$7) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \Phi - \text{эллиптический цилиндр};$$

$$8) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1; \Phi - \text{мнимый эллиптический цилиндр};$$

$$9) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \Phi - \text{гиперболический цилиндр};$$

$$10) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0; \Phi - \text{пара пересекающихся (по прямой) плоскостей};$$

$$11) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0; \Phi - \text{пара мнимых пересекающихся (по действительной прямой) плоскостей};$$

$$12) \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0; \Phi - \text{эллиптический параболоид};$$

$$13) \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0; \Phi - \text{гиперболический параболоид};$$

$$14) \frac{x^2}{a^2} = 1; \Phi - \text{пара параллельных плоскостей};$$

$$15) \frac{x^2}{a^2} = -1; \Phi - \text{пара мнимых параллельных плоскостей};$$

$$16) x^2 = 0; \Phi - \text{сдвоенная плоскость};$$

$$17) y^2 = 2px, \quad p > 0; \Phi - \text{параболический цилиндр}.$$

Приведенные уравнения называются **каноническими уравнениями** указанных фигур.

Следующее утверждение описывает плоские сечения пространственных фигур второго порядка, т. е. фигуры, являющиеся пересечениями фигур второго порядка и плоскостей.

Утверждение 3.5.2. Любое плоское сечение пространственной фигуры второго порядка есть фигура одного из четырех типов:

- 1) плоская фигура второго порядка;
- 2) прямая;
- 3) плоскость;
- 4) пустое множество.

Доказательство. Пусть Φ – фигура второго порядка в пространстве E^3 , π – плоскость. Выберем такой аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в пространстве, для которого координатная плоскость Ox_1x_2 совпадает с плоскостью π . Из утверждения 3.5.1 следует, что фигура Φ в выбранном репере может быть задана уравнением (3.5.1). Тогда пересечение $\Phi \cap \pi$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Подставляя $z = 0$ в первое уравнение системы, получим уравнение фигуры $\Phi \cap \pi$ в системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ на плоскости π :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Для коэффициентов последнего уравнения возможны четыре альтернативы.

1. Среди чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} есть ненулевые. В этом случае $\Phi \cap \pi$ – фигура второго порядка на плоскости π .

2. Числа a_{11}, a_{12}, a_{22} равны нулю, но хотя бы одно из чисел a_1, a_2 отлично от нуля. В этом случае $\Phi \cap \pi$ задается уравнением $2a_1x + 2a_2y + a = 0$ и, следовательно, $\Phi \cap \pi$ – прямая на плоскости π .

3. Числа $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2$ равны нулю, но $a \neq 0$. В этом случае $\Phi \cap \pi$ задается уравнением $a = 0$, которое не имеет решений, следовательно, $\Phi \cap \pi$ – пустое множество.

4. Если все коэффициенты многочлена, стоящего в левой части уравнения, равны нулю, то $\Phi \cap \pi$ совпадает с плоскостью π . ►

Упражнение 3.5.1. (i) Для каждой из 17 фигур, перечисленных в теореме 3.5.1, найдите возможные плоские сечения.

(ii) Для трехосного эллипсоида Φ , который в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$, найдите все **круговые сечения**, т. е. укажите все такие плоскости π , что $\Phi \cap \pi$ – окружность.

§ 3.6. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Рассматривая карты сечений однополостного параболоида и гиперболического параболоида в § 3.5, мы видели, что есть пары пересекающихся прямых, целиком содержащиеся в этих фигурах. В этом параграфе мы покажем, что эти прямые

можно включить в два семейства попарно непересекающихся прямых, объединение которых составляет всю фигуру. Каждое из этих семейств прямых называется **семейством прямолинейных образующих** соответствующей фигуры.

Рассмотрим вначале однополостный гиперболоид вращения Φ , заданный в прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3.6.1)$$

Сечение этой фигуры плоскостью $x = a$ есть пара пересекающихся прямых $\{\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}\}$ (рис. 3.6.1), которые задаются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

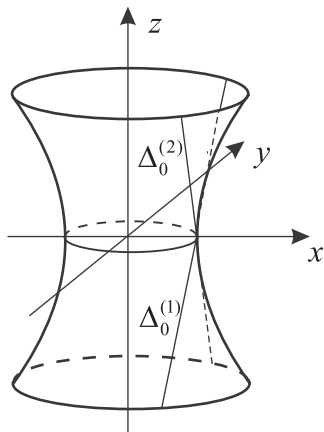


Рис. 3.6.1

Запишем параметрические уравнения этих прямых:

$$^{(1)}: \begin{cases} x = a, \\ y = at, \\ z = ct \end{cases} \quad \text{и} \quad \Delta_0^{(2)}: \begin{cases} x = a, \\ y = at, \\ z = -ct. \end{cases}$$

Повернем прямую $\Delta_0^{(1)}$ вокруг оси Oz на произвольный угол α , получим прямую, которую обозначим $\Delta_\alpha^{(1)}$. Поскольку рассматриваемый гиперболоид Φ есть фигура вращения с осью вращения Oz , то повернутая прямая $\Delta_\alpha^{(1)}$, так же как и исходная $\Delta_0^{(1)}$, полностью лежит на гиперболоиде. Рассмотрим семейство прямых $(\Delta_\alpha^{(1)})_{\alpha \in [0, 2\pi)}$, получающееся при полном обороте прямой $\Delta_0^{(1)}$ вокруг оси Oz (рис. 3.6.2).

Прямые этого семейства лежат на гиперболоиде, и они попарно не пересекаются. Если прямая $\Delta_0^{(1)}$ совершит полный оборот вокруг оси Oz , то каждая точка

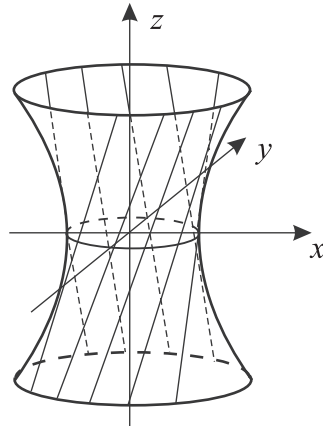


Рис. 3.6.2

этой прямой, расположенная на «высоте» $z = ct$, опишет окружность, лежащую на гиперboloиде. Поскольку гиперboloид вращения Φ есть объединение всевозможных таких окружностей, то $\bigcup_{\alpha \in [0, 2\pi)} \Delta_{\alpha}^{(1)} = \Phi$.

Таким образом, однополостный гиперboloид вращения можно получить вращением прямой $\Delta_0^{(1)}$ вокруг оси Oz , т. е. $(\Delta_{\alpha}^{(1)})_{\alpha \in [0, 2\pi)}$ – семейство прямолинейных образующих фигуры Φ . Отметим, что через каждую точку гиперboloида проходит ровно одна образующая этого семейства.

Найдем уравнения прямой $\Delta_{\alpha}^{(1)}$. Для этого запишем формулы, задающие преобразование поворота $R_z(\alpha)$ пространства E^3 вокруг оси Oz на угол α . Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка пространства, $M'(x', y', z')$ – образ точки при этом повороте. Если на плоскости Oxy ввести полярную систему координат (r, φ) , согласованную с прямоугольной системой координат (x, y) , то $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (см. § 2.2). Очевидно, что при повороте точки M вокруг оси Oz на угол α ее аппликата z и полярный радиус r не изменяются, а полярный угол φ увеличивается на α . Таким образом,

$$\begin{cases} x' = r \cos(\varphi + \alpha) = (r \cos \varphi) \cos \alpha - (r \sin \varphi) \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = r \sin(\varphi + \alpha) = (r \sin \varphi) \cos \alpha + (r \cos \varphi) \sin \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z' = z, \end{cases}$$

т. е. преобразование поворота $R_z(\alpha)$ задается формулами

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z' = z. \end{cases}$$

Подставляя в последние формулы вместо (x, y, z) координаты (a, at, ct) точек прямой $\Delta_0^{(1)}$, получим параметрические уравнения прямой $\Delta_{\alpha}^{(1)}$:

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha - ta \sin \alpha, \\ y = a \sin \alpha + ta \cos \alpha, \\ z = ct. \end{cases}$$

Аналогично, поворачивая прямую $\Delta_0^{(2)}$ вокруг оси Oz , получим второе семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида вращения $(\Delta_\alpha^{(2)})_{\alpha \in [0, 2\pi)}$ (рис. 3.6.3):

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha - t a \sin \alpha, \\ y = a \sin \alpha + t a \cos \alpha, \\ z = -ct. \end{cases}$$

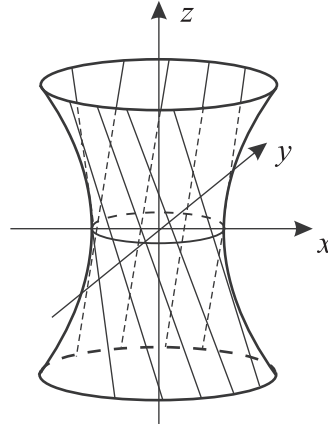


Рис. 3.6.3

От однополостного гиперболоида вращения Φ с уравнением (3.6.1) можно перейти к однополостному гиперболоиду общего вида с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.6.2)$$

действуя на Φ преобразованием сжатия

$$f: \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{E}^3, \quad M(x, y, z) \mapsto M'(x, ky, z)$$

с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$ (см. § 3.4). При действии f прямые $\Delta_\alpha^{(1)}$ и $\Delta_\alpha^{(2)}$ перейдут соответственно в прямые $f(\Delta_\alpha^{(1)})$ и $f(\Delta_\alpha^{(2)})$ с параметрическими уравнениями:

$$f(\Delta_\alpha^{(1)}): \begin{cases} x = a \cos \alpha - t a \sin \alpha, \\ y = b \sin \alpha + t b \cos \alpha, \\ z = ct \end{cases} \text{ и } f(\Delta_\alpha^{(2)}): \begin{cases} x = a \cos \alpha - t a \sin \alpha, \\ y = b \sin \alpha + t b \cos \alpha, \\ z = -ct, \end{cases} \quad (3.6.3)$$

лежащие на гиперболоиде (3.6.2).

Теорема 3.6.1. (i) На однополостном гиперболоиде с каноническим уравнением (3.6.2) лежат два семейства прямых (прямолинейных образующих) $f(\Delta_\alpha^{(1)})$, $f(\Delta_\alpha^{(2)})$, $\alpha \in [0; 2\pi)$ с параметрическими уравнениями (3.6.3).

(ii) Две прямые, принадлежащие одному семейству, скрещиваются.

(iii) Две прямые, принадлежащие различным семействам, отвечающие значениям параметра $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, пересекаются в одной точке, если $|\alpha_1 - \alpha_2| \neq \pi$, и параллельны, если $|\alpha_1 - \alpha_2| = \pi$.

Доказательство. Истинность части (i) вытекает из рассуждений, проведенных перед формулировкой теоремы.

(ii) Рассмотрим две прямые первого семейства $f(\Delta_{\alpha_1}^{(1)})$, $f(\Delta_{\alpha_2}^{(1)})$, отвечающие различным значениям параметра $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$. Их начальные точки соответственно $M_1^0(a \cos \alpha_1, b \sin \alpha_1, 0)$ и $M_2^0(a \cos \alpha_2, b \sin \alpha_2, 0)$, направляющие векторы $\vec{a}_1(-a \sin \alpha_1, b \cos \alpha_1, c)$ и $\vec{a}_2(-a \sin \alpha_2, b \cos \alpha_2, c)$. Составим матрицу из координатных строк векторов $\overline{M_1^0 M_2^0}(a(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), b(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), 0)$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и вычислим ее определитель:

$$\det \begin{bmatrix} a(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) & b(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) & 0 \\ -a \sin \alpha_1 & b \cos \alpha_1 & c \\ -a \sin \alpha_2 & b \cos \alpha_2 & c \end{bmatrix} = -4abc \sin^2 \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right).$$

Поскольку $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; 2\pi)$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $0 < \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{2} < \pi$, и, следовательно, $\sin \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \neq 0$. Это означает, что векторы $\overline{M_1^0 M_2^0}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 линейно независимы, т. е. прямые $f(\Delta_{\alpha_1}^{(1)})$ и $f(\Delta_{\alpha_2}^{(1)})$ скрещиваются.

Для пары прямых второго семейства рассуждения аналогичны.

(iii) Рассмотрим две прямые различных семейств $f(\Delta_{\alpha_1}^{(1)})$, $f(\Delta_{\alpha_2}^{(2)})$. Их начальные точки соответственно $M_1^0(a \cos \alpha_1, b \sin \alpha_1, 0)$ и $M_2^0(a \cos \alpha_2, b \sin \alpha_2, 0)$, направляющие векторы $\vec{a}_1(-a \sin \alpha_1, b \cos \alpha_1, c)$ и $\vec{a}_2(-a \sin \alpha_2, b \cos \alpha_2, -c)$. Составим матрицу из координатных строк векторов $\overline{M_1^0 M_2^0}(a(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), b(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), 0)$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и вычислим ее определитель:

$$\det \begin{bmatrix} a(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) & b(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) & 0 \\ -a \sin \alpha_1 & b \cos \alpha_1 & c \\ -a \sin \alpha_2 & b \cos \alpha_2 & -c \end{bmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя означает, что векторы $\overline{M_1^0 M_2^0}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 линейно зависимы, т. е. прямые $f(\Delta_{\alpha_1}^{(1)})$ и $f(\Delta_{\alpha_2}^{(2)})$ лежат в одной плоскости. Направляющие векторы этих прямых коллинеарны тогда и только тогда, когда $\sin \alpha_2 = -\sin \alpha_1$, $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$, т. е. $|\alpha_1 - \alpha_2| = \pi$. В этом случае прямые $f(\Delta_{\alpha_1}^{(1)})$ и $f(\Delta_{\alpha_2}^{(2)})$ параллельны, они проходят через точки горлового эллипса гиперболоида, симметричные относительно центра эллипса. Во всех других случаях прямые $f(\Delta_{\alpha_1}^{(1)})$ и $f(\Delta_{\alpha_2}^{(2)})$ пересекаются в одной точке. ►

Перейдем к гиперболическому параболоиду Φ с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0. \quad (3.6.4)$$

Сечение этого параболоида плоскостью с уравнением $z = 0$ есть пара пересекающихся прямых $\{\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}\}$ (рис. 3.6.4), которые задаются системами уравнений

$$\Delta_0^{(1)} : \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \Delta_0^{(2)} : \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (3.6.5)$$

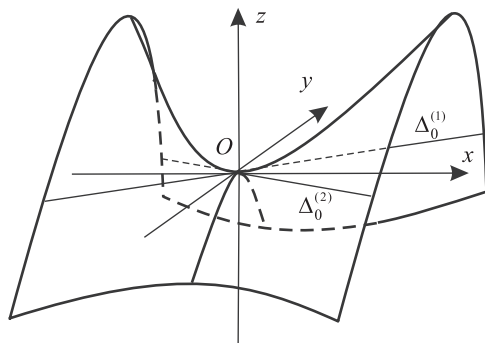


Рис. 3.6.4

Помимо этих двух прямых на параболоиде Φ есть и другие прямые. Пусть k – произвольное ненулевое вещественное число. Системы уравнений:

$$\Delta_k^{(1)} : \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2k, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{z}{k} \end{cases} \quad \text{и} \quad \Delta_k^{(2)} : \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2k, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{z}{k}, \end{cases} \quad (3.6.6)$$

задают два семейства прямых в пространстве $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$, $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$, которые лежат на параболоиде Φ (рис. 3.6.5).

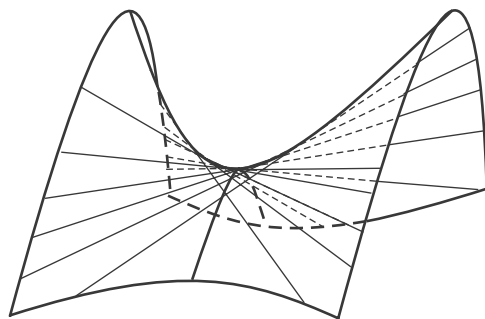


Рис. 3.6.5

Теорема 3.6.2. (i) На гиперболическом параболоиде с каноническим уравнением (3.6.4) лежат два семейства прямых (прямолинейных образующих) $(\Delta_k^{(1)})$, $(\Delta_k^{(2)})$, $k \in \mathbf{R}$ с уравнениями (3.6.5) и (3.6.6).

(ii) Две прямые, принадлежащие одному семейству, скрещиваются.

(iii) Две прямые, принадлежащие различным семействам, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Истинность части (i) вытекает из рассуждений, проведенных перед формулировкой теоремы.

(ii) Рассмотрим две прямые первого семейства: $\Delta_{k_1}^{(1)}$, $\Delta_{k_2}^{(1)}$, отвечающие различным значениям параметра $k = k_1$ и $k = k_2$. Их начальные точки соответственно $M_1^0(2k_1\sqrt{p}, 0, 2k_1^2)$ и $M_2^0(2k_2\sqrt{p}, 0, 2k_2^2)$, направляющие векторы $\vec{a}_1(\sqrt{p}, \sqrt{q}, 2k_1)$ и $\vec{a}_2(\sqrt{p}, \sqrt{q}, 2k_2)$. Составим матрицу из координатных строк векторов $\overline{M_1^0 M_2^0}(2\sqrt{p}(k_2 - k_1), 0, 2(k_2^2 - k_1^2))$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и вычислим ее определитель:

$$\det \begin{bmatrix} 2\sqrt{p}(k_2 - k_1) & 0 & 2(k_2^2 - k_1^2) \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & 2k_1 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & 2k_2 \end{bmatrix} = 4\sqrt{pq}(k_2 - k_1)^2.$$

Поскольку $k_1 \neq k_2$, этот определитель отличен от нуля. Это означает, что векторы $\overline{M_1^0 M_2^0}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 линейно независимы, т. е. прямые $f(\Delta_{\alpha_1}^{(1)})$ и $f(\Delta_{\alpha_2}^{(1)})$ скрещиваются.

Для пары прямых второго семейства рассуждения аналогичны.

(iii) Рассмотрим две прямые различных семейств $\Delta_{k_1}^{(1)}$, $\Delta_{k_2}^{(2)}$. Их начальные точки соответственно $M_1^0(2k_1\sqrt{p}, 0, 2k_1^2)$ и $M_2^0(2k_2\sqrt{p}, 0, 2k_2^2)$, направляющие векторы $\vec{a}_1(\sqrt{p}, \sqrt{q}, 2k_1)$ и $\vec{a}_2(\sqrt{p}, -\sqrt{q}, 2k_2)$. Составим матрицу из координатных строк векторов $\overline{M_1^0 M_2^0}(2\sqrt{p}(k_2 - k_1), 0, 2(k_2^2 - k_1^2))$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и вычислим ее определитель:

$$\det \begin{bmatrix} 2\sqrt{p}(k_2 - k_1) & 0 & 2(k_2^2 - k_1^2) \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & 2k_1 \\ \sqrt{p} & -\sqrt{q} & 2k_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя означает, что векторы $\overline{M_1^0 M_2^0}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 линейно зависимы, т. е. прямые $\Delta_{k_1}^{(1)}$ и $\Delta_{k_2}^{(2)}$ лежат в одной плоскости. Направляющие векторы этих прямых не коллинеарны, следовательно, прямые $\Delta_{k_1}^{(1)}$ и $\Delta_{k_2}^{(2)}$ пересекаются в одной точке. ►

Упражнение 3.6.1. Докажите, что никаких других прямых, кроме прямолинейных образующих, на однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде нет.

Замечание 3.6.1. Можно заметить, что некоторые рисунки поверхностей второго порядка содержат одну характерную неточность. Например, на рис. 3.4.6 изображен однополостный гиперболоид вращения вместе с осями декартовой прямоугольной системы координат $Oxuz$. Горловая окружность при этом должна быть нарисована в виде эллипса, который симметричен относительно осей Ox и Oy . Отметим, что здесь речь идет о косо́й симметрии относительно одной оси в направлении другой. На рис. 3.4.6 это не выполняется. Если допущенную неточность исправить, рисунки станут заметно сложнее. В то же время исходный рисунок отражает суть дела и легко может быть повторен студентами. Это обстоятельство и объясняет выбор упрощенных вариантов рисунков для гл. 3.

ГЛАВА 4

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

В этой главе мы рассмотрим новое геометрическое понятие, а именно *проективную плоскость*. Эта плоскость нового типа, как и знакомая нам евклидова плоскость E^2 , есть множество (будем обозначать его RP^2), элементы которого называются (*проективными*) *точками*¹. Как и на плоскости E^2 , на проективной плоскости RP^2 имеются подмножества, которые называются (*проективными*) *прямыми*. Как и евклидову плоскость E^2 , проективную плоскость можно определить аксиоматически, сформулировав свойства, которыми обладают проективные точки и прямые. Однако для первоначального знакомства с новым объектом мы рассмотрим ряд конкретных *моделей* проективной плоскости, реализуемых в рамках евклидовой геометрии, а также в числовых множествах.

§ 4.1. ДВЕ МОДЕЛИ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть O – фиксированная точка пространства E^3 . Множество всех прямых пространства, проходящих через O , называется *связкой прямых* с центром в точке O . Каждую прямую связки будем называть *проективной точкой* (или *точкой проективной плоскости*). Множество L всех прямых этой связки, лежащих в одной плоскости π (проходящей, разумеется, через O), называется *проективной прямой* (или *прямой проективной плоскости*). Если прямая связки Δ лежит в плоскости π , то будем говорить, что *проективная точка Δ лежит на проективной прямой L* или *проективная прямая L проходит через проективную точку Δ* . В этой ситуации говорят также, что точка Δ и прямая L *инцидентны* друг другу.

Таким образом, мы приходим к *первой модели проективной плоскости* как множеству RP^2 проективных точек, представляемых прямыми связки, в котором проективные прямые представляются множествами прямых связки, лежащими в одной плоскости (рис. 4.1.1). Прямые связки играют в этой модели двойную роль: будучи прямыми в евклидовом пространстве, они одновременно являются точками проективной плоскости. Эта модель будет у нас основной, и будем называть ее просто *проективной плоскостью*.

¹ Рассматриваемая нами проективная плоскость точнее называется *вещественной проективной плоскостью*, поскольку в построениях используется поле вещественных чисел R . Понятие проективной плоскости можно определить для произвольного поля.

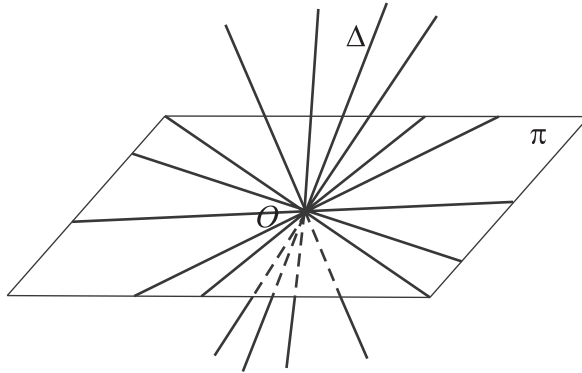


Рис. 4.1.1

Отметим следующие свойства точек и прямых проективной плоскости, вытекающие из данных выше определений.

1. *Через любые две точки проективной плоскости проходит единственная прямая.* На языке евклидовой геометрии это свойство означает следующий очевидный факт: через две пересекающиеся в точке O прямые проходит единственная плоскость.

2. *Любые две прямые на проективной плоскости пересекаются в одной точке.* Это свойство означает, другими словами, что две плоскости, проходящие через точку O , пересекаются по прямой, проходящей через точку O . Таким образом, на проективной плоскости, в отличие от евклидовой, нет параллельных прямых.

Перейдем теперь ко второй модели проективной плоскости, в которой проективная плоскость тесно связывается с евклидовой.

В пространстве \mathbf{E}^3 наряду со связкой прямых с центром в точке O рассмотрим плоскость \mathbf{E}^2 , не проходящую через точку O (рис. 4.1.2).

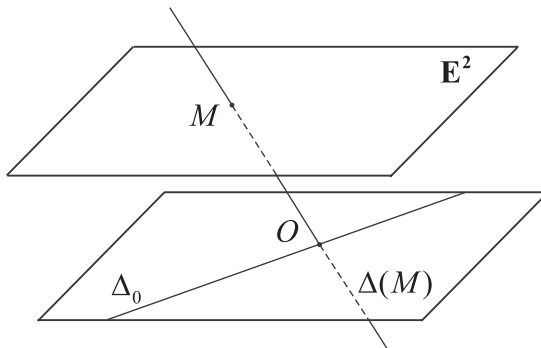


Рис. 4.1.2

Для любой точки M плоскости \mathbf{E}^2 существует единственная прямая $\Delta(M)$ связки, проходящая через O и M . Рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{RP}^2, M \mapsto \Delta(M). \quad (4.1.1)$$

Это отображение, очевидно, инъективно, следовательно, отождествляя точку M и ее образ $\Delta(M)$, мы получаем вложение евклидовой плоскости \mathbf{E}^2 в проективную плоскость \mathbf{RP}^2 : $\mathbf{E}^2 \subset \mathbf{RP}^2$. Поскольку прямые связки, параллельные плоскости \mathbf{E}^2 , не пересекают эту плоскость, то эти прямые не могут быть получены в виде

$\Delta(M)$, $M \in \mathbf{E}^2$ (прямая Δ_0 на рис. 4.1.2). Это означает, что отображение (4.1.1) не является взаимно однозначным. Чтобы добиться взаимной однозначности, расширим евклидову плоскость, добавив к множеству ее точек некоторые элементы, не принадлежащие множеству \mathbf{E}^2 , называемые **несобственными** или **бесконечно удаленными точками**.

Для определения несобственных точек будем использовать соображения непрерывности. Пусть Δ_0 – прямая связки, не лежащая в образе отображения φ , т. е. параллельная плоскости \mathbf{E}^2 . Рассмотрим плоскость π , проходящую через Δ_0 и не параллельную плоскости \mathbf{E}^2 . Пересечение $\mathbf{E}^2 \cap \pi$ есть прямая l плоскости \mathbf{E}^2 . Проективную точку Δ_0 можно получить, если выбрать какую-то прямую пучка $\Delta(M)$, $M \in l$, и затем поворачивать ее в плоскости π вокруг точки O в одном из двух направлений до совмещения с прямой Δ_0 . При этом повороте точка M движется по прямой l к бесконечности в одном из двух направлений (рис. 4.1.3).

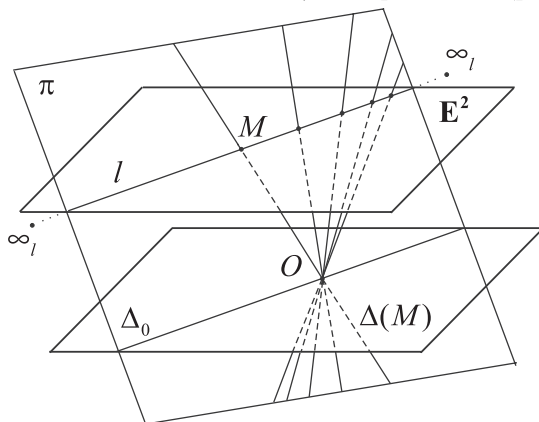


Рис. 4.1.3

При повороте прямой $\Delta(M)$ вокруг точки O в противоположном направлении до совмещения с прямой Δ_0 точка M движется по прямой l к бесконечности в противоположном направлении. Если выбрать вместо плоскости π любую другую плоскость π' , проходящую через Δ_0 и не параллельную плоскости \mathbf{E}^2 , описанная ситуация сохраняется. А именно, мы достигаем той же проективной точки Δ_0 , двигаясь к бесконечности по любой прямой l' , параллельной прямой l .

Это наблюдение подсказывает следующий способ выбора несобственных точек. Каждой прямой l на плоскости \mathbf{E}^2 поставим в соответствие одну несобственную точку ∞_l . Прямую l , дополненную несобственной точкой ∞_l , т. е. множество $l \cup \{\infty_l\}$, будем называть **пополненной прямой**. Точка ∞_l добавляется к прямой l с соблюдением определенных условий непрерывности: ее следует представлять как некий предельный элемент, к которому стремится переменная точка M при ее движении по прямой к бесконечности в каждом из двух возможных направлений. В этом смысле точка ∞_l «закрывает» прямую (рис. 4.1.4)¹.

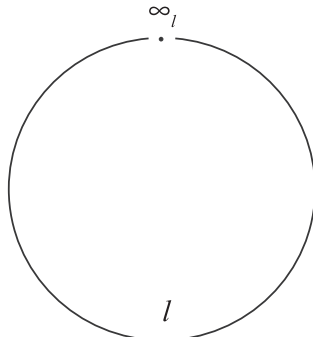


Рис. 4.1.4

¹ С точки зрения топологии пополненная прямая $l \cup \{\infty_l\}$ гомеоморфна окружности.

Выше было отмечено, что, двигаясь по параллельным прямым к бесконечности в плоскости \mathbf{E}^2 , мы достигаем одной и той же проективной точки Δ_0 . Поэтому естественно считать, что для параллельных прямых несобственные точки совпадают: если $l_1 \parallel l_2$, то $\infty_{l_1} = \infty_{l_2}$. Несобственные точки непараллельных прямых различны: если $l_1 \nparallel l_2$, то $\infty_{l_1} \neq \infty_{l_2}$. Множество всех несобственных точек обозначим l_∞ и будем называть *несобственной прямой* плоскости \mathbf{E}^2 . Используя несобственные точки, можно продолжить определенное выше отображение φ до отображения $\bar{\varphi}: \mathbf{E}^2 \cup l_\infty \rightarrow \mathbf{RP}^2$ следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}(M) = \varphi(M), \text{ если } M \in \mathbf{E}^2, \\ \bar{\varphi}(\infty_l) = \Delta_0. \end{cases}$$

Отображение $\bar{\varphi}$, очевидно, является биекцией.

Теперь можно определить **вторую модель проективной плоскости** как множество $\mathbf{E}^2 \cup l_\infty$. В этой модели *проективные точки* делятся на собственные, т. е. принадлежащие евклидовой плоскости \mathbf{E}^2 , и несобственные, т. е. точки множества l_∞ . *Проективными прямыми* во второй модели являются множества вида $l \cup \{\infty_l\}$, т. е. евклидовы прямые, пополненные несобственными точками, а также множество l_∞ , т. е. несобственная прямая.

Подчеркнем важное обстоятельство: отображение $\bar{\varphi}$ является биекцией между множествами точек в двух моделях проективной плоскости. Кроме того, при этом отображении проективные прямые во второй модели переходят в проективные прямые первой модели, т. е. устанавливается также взаимно однозначное соответствие между множествами прямых в двух моделях. В такой ситуации говорят, что $\bar{\varphi}$ – *изоморфизм* двух моделей проективной плоскости. Евклидова плоскость \mathbf{E}^2 вместе с отображением φ , т. е. пара (\mathbf{E}^2, φ) , называется **евклидовой локальной картой** проективной плоскости \mathbf{RP}^2 . Будем называть *евклидовой локальной картой* и саму плоскость \mathbf{E}^2 , так как отображение φ однозначно определяется плоскостью. Поскольку в пространстве \mathbf{E}^2 есть бесконечно много плоскостей \mathbf{E}^2 , не проходящих через точку O , то существует бесконечно много локальных карт проективной плоскости. Для каждой карты получается свое разделение точек проективной плоскости на точки, соответствующие собственным и несобственным точкам второй модели.

§ 4.2. ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим первую модель проективной плоскости \mathbf{RP}^2 , реализуемую связкой прямых пространства \mathbf{E}^3 с центром в точке O . Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис множества векторов пространства, Δ – прямая связки, т. е. проективная точка.

Определение 4.2.1. *Однородными координатами проективной точки Δ относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называются координаты любого направляющего вектора прямой Δ в данном базисе.*

Таким образом, если $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ – направляющий вектор прямой Δ , то упорядоченная тройка чисел (x, y, z) – однородные координаты проективной точки.

ки Δ . Поскольку наряду с вектором \vec{a} направляющим вектором прямой Δ является любой вектор вида $\lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$, то однородные координаты проективной точки определяются не однозначно, а с точностью до ненулевого скалярного множителя, т. е. тройка чисел $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda \neq 0$, – также однородные координаты точки Δ . Таким образом, вместе с тройкой чисел (x, y, z) однородными координатами точки Δ является любая другая тройка чисел, пропорциональная данной. По этой причине однородные координаты проективной точки Δ записывают в виде $(x : y : z)$.

Запишем формулы преобразования однородных координат проективных точек при переходе от базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ к базису $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. Поскольку однородные координаты проективной точки – это координаты направляющих векторов соответствующей прямой, то искомые формулы имеют точно такой же вид, как формулы преобразования координат векторов при изменении базиса:

$$\begin{cases} x = s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + s_{23}z, \\ z = s_{31}x' + s_{32}y' + s_{33}z'. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Здесь переменные без штрихов – однородные координаты проективной точки относительно старого базиса, переменные со штрихами – однородные координаты проективной точки относительно нового базиса, $S = (s_{ij})$ – матрица перехода от старого базиса к новому. Напоминаем, что в формулах (4.2.1) переменные (со штрихами и без штрихов) рассматриваются с точностью до пропорциональности. Поэтому понимать эти формулы надо следующим образом. При фиксировании конкретной тройки чисел (x', y', z') из класса пропорциональных троек $(x' : y' : z')$ по равенствам (4.2.1) получаем конкретную тройку чисел (x, y, z) из класса пропорциональных троек $(x : y : z)$. Если же взять произвольно две тройки (x, y, z) и (x', y', z') из соответствующих классов пропорциональных троек, то они не будут, вообще говоря, связаны формулами (4.2.1). Однако найдется единственное число $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ такое, что будут верны равенства

$$\begin{cases} \lambda x = s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \\ \lambda y = s_{21}x' + s_{22}y' + s_{23}z, \\ \lambda z = s_{31}x' + s_{32}y' + s_{33}z'. \end{cases}$$

Найдем уравнение проективной прямой в однородных координатах относительно данного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Вначале уточним, что понимается под этим термином. В общем случае, если Φ – некоторая фигура на проективной плоскости \mathbf{RP}^2 , то ее уравнением в однородных координатах называется уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (4.2.2)$$

множество решений которого совпадает с множеством однородных координат точек фигуры Φ . Здесь $F(x, y, z)$ – вещественнозначная функция трех вещественных переменных, обладающая, очевидно, следующим свойством: если $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ для некоторой тройки чисел (x_0, y_0, z_0) , то $F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$. В качестве таких функций могут выступать, например, вещественные полиномиальные однородные функции от трех переменных различных степеней.

Каждой фигуре Φ на проективной плоскости \mathbf{RP}^2 можно сопоставить коническую фигуру $\tilde{\Phi}$ (с вершиной в точке O) в пространстве E^3 , состоящую из точек

всех тех прямых связки, которые составляют Φ . Это соответствие, очевидно, является взаимно однозначным между множеством фигур на проективной плоскости и множеством нетривиальных (не сводящихся к одной точке) конических фигур с вершиной O в пространстве \mathbf{E}^3 . Заметим теперь, что множество однородных координат проективной точки (множество координат всевозможных направляющих векторов прямой Δ) совпадает с множеством аффинных координат точек прямой Δ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Отсюда можно сделать следующий вывод: уравнение (4.2.2) есть уравнение фигуры Φ на проективной плоскости \mathbf{RP}^2 в однородных координатах относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ тогда и только тогда, когда это уравнение в аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задает соответствующую Φ коническую фигуру $\hat{\Phi}$ в \mathbf{E}^3 .

Рассмотрим теперь проективную прямую L , т. е. множество прямых связки, лежащих в плоскости π , проходящей через точку O . Ясно, что плоскость π есть та самая коническая фигура, которая соответствует прямой L в указанном выше смысле, т. е. $\pi = \hat{L}$. Поскольку плоскость π в аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ может быть задана линейным однородным уравнением

$$ax + by + cz = 0, \quad (4.2.3)$$

то это же уравнение (4.2.3) есть уравнение проективной прямой L в однородных координатах.

Пусть $\Delta_1(x_1 : y_1 : z_1)$ и $\Delta_2(x_2 : y_2 : z_2)$ – две проективные точки, заданные своими однородными координатами. Чтобы найти уравнение проективной прямой, проходящей через точки Δ_1 и Δ_2 , надо записать в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ общее уравнение плоскости, проходящей через начало координат и имеющей направляющие векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$. Это уравнение, очевидно, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2.4)$$

Обратимся теперь ко второй модели проективной плоскости $\mathbf{E}^2 \cup I_\infty$, т. е. к евклидовой плоскости, пополненной несобственными точками. Используя изоморфизм $\bar{\varphi}$ между первой и второй моделями проективной плоскости, построенный в § 4.1, для точек второй модели можно определить однородные координаты относительно любого базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ множества векторов пространства. Однако в рассматриваемой ситуации базисные векторы удобно выбирать специальным образом, а именно, будем считать, что (\vec{e}_1, \vec{e}_2) – базис множества векторов плоскости \mathbf{E}^2 , а $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OO_1}$, где O_1 – фиксированная точка плоскости \mathbf{E}^2 (рис. 4.2.1).

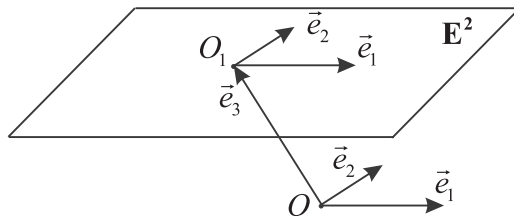


Рис. 4.2.1

В этом случае аффинный репер $(O_1, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ на плоскости \mathbf{E}^2 согласован с базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Каждая точка M плоскости \mathbf{E}^2 , т. е. собственная проективная точка, имеет два типа координат: однородные координаты $(x : y : z)$ относительно базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и аффинные (неоднородные) координаты (ξ, η) в репере $(O_1, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Числа ξ и η определяются однозначно, а x, y, z – с точностью до ненулевого множителя λ . Найдем связь между однородными и неоднородными координатами точки M .

Если у точки M известны аффинные координаты (ξ, η) , то

$$\overline{O_1 M} = \xi \bar{e}_1 + \eta \bar{e}_2; \quad \overline{OM} = \overline{O_1 M} + \overline{OO_1} = \xi \bar{e}_1 + \eta \bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Последнее равенство означает, что $(x : y : z) = (\xi : \eta : 1)$.

Если же у точки M известны однородные координаты $(x : y : z)$, то для некоторого ненулевого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ верно равенство $\overline{OM} = \lambda x \bar{e}_1 + \lambda y \bar{e}_2 + \lambda z \bar{e}_3$. Следовательно, $\lambda x = \xi, \lambda y = \eta, \lambda z = 1$, т. е.

$$\xi = \frac{x}{z}, \quad \eta = \frac{y}{z}. \quad (4.2.5)$$

В частности, третья однородная координата z собственной точки M ненулевая. Следовательно, несобственные точки относительно выбранного базиса имеют однородные координаты вида $(x : y : 0)$, т. е. третья координата z равна нулю.

Пусть прямая l на евклидовой плоскости \mathbf{E}^2 имеет в репере $(O_1, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ уравнение

$$a\xi + b\eta + c = 0. \quad (4.2.6)$$

Подставляя в это уравнение $\xi = \frac{x}{z}, \eta = \frac{y}{z}$, получим уравнение прямой l в однородных координатах

$$a \frac{x}{z} + b \frac{y}{z} + c = 0. \quad (4.2.7)$$

Умножая обе части уравнения (4.2.7) на z , получим уравнение

$$ax + by + cz = 0 - \quad (4.2.8)$$

следствие предыдущего. Оказывается, уравнение (4.2.8) задает пополненную прямую $l \cup \{\infty_l\}$. Действительно, решения последнего уравнения при условии, что $z \neq 0$, есть однородные координаты точек прямой l . При $z = 0$ все ненулевые решения этого уравнения имеют вид $(-\lambda b, \lambda a, 0)$, $\lambda \neq 0$, которые являются однородными координатами несобственной точки этой прямой ∞_l .

Рассмотрим теперь еще одну модель проективной плоскости. Пусть $X = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ – множество ненулевых упорядоченных троек вещественных чисел. Введем на этом множестве следующее отношение эквивалентности: тройка (x_1, y_1, z_1) эквивалентна тройке (x_2, y_2, z_2) тогда и только тогда, когда $x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$. Другими словами, две тройки чисел эквивалентны, если они пропорциональны.

Нетрудно проверить, что определенное выше бинарное отношение на множестве X действительно является отношением эквивалентности. Обозначим (x, y, z) класс эквивалентности тройки $(x, y, z) \in X$ и назовем (x, y, z) точкой. Множество всех точек составляет фактор-множество \bar{X} множества X по данному отношению эквивалентности. Рассмотрим некоторое линейное уравнение (4.2.8), где вещественные числа a, b, c не равны нулю одновременно. Если тройка чисел

$(x_0, y_0, z_0) \in X$ есть решение этого уравнения, то тройка $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, – также решение. Следовательно, можно говорить, что *точка* $\overline{(x_0, y_0, z_0)}$ *множества* \bar{X} *есть решение уравнения* (4.2.8). Множество всех точек из \bar{X} , являющихся решениями уравнения (4.2.8), назовем *прямой*. Таким образом, мы приходим к еще одной модели проективной плоскости, где проективные точки есть классы пропорциональных ненулевых троек вещественных чисел, а проективные прямые состоят из точек, являющихся решениями линейных однородных уравнений (4.2.8). Эта модель называется **арифметической моделью** проективной плоскости \mathbf{RP}^2 . Изоморфизм этой модели и первой модели проективной плоскости получается, если зафиксировать базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и точке $(x, y, z) \in \bar{X}$ поставить в соответствие прямую связки, имеющую однородные координаты $(x : y : z)$ относительно этого базиса.

§ 4.3. ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Определение 4.3.1. Фигура Φ на проективной плоскости \mathbf{RP}^2 называется **фигурой второго порядка**, если она может быть задана алгебраическим однородным уравнением второй степени в однородных координатах.

Таким образом, фигура второго порядка Φ на проективной плоскости \mathbf{RP}^2 задается уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0. \quad (4.3.1)$$

В уравнении (4.3.1) a_{ij} – вещественные числа; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ – ненулевая матрица; $(x : y : z)$ – однородные координаты относительно некоторого базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ множества векторов пространства \mathbf{E}^3 .

Выясним, какие фигуры на проективной плоскости являются фигурами второго порядка. Рассмотрим, как изменится уравнение (4.3.1), если перейти к новым однородным координатам $(x' : y' : z')$, заменив базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ на другой базис $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$. Как отмечено в § 4.2, формулы преобразования однородных координат имеют вид

$$\begin{cases} x = s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + s_{23}z', \\ z = s_{31}x' + s_{32}y' + s_{33}z'. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Здесь $S = (s_{ij})$ – матрица перехода от старого базиса к новому. Чтобы найти уравнение фигуры Φ в новых координатах, подставим выражения x, y, z из (4.3.2) в (4.3.1). При этом левая часть уравнения (4.3.1), которая является квадратичной формой от трех переменных, преобразуется путем линейной невырожденной замены переменных. В курсе алгебры [2] доказывается, что с помощью такой замены квадратичную форму можно привести к *нормальному виду*, т. е. сумме квадратов переменных с коэффициентами, равными ± 1 . Умножая при необходимости обе части нового уравнения на -1 , получим, что при подходящем выборе нового базиса уравнение фигуры Φ в новых однородных координатах есть одно из следующих:

- 1) $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$;
- 2) $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$;

$$3) x'^2 - y'^2 = 0;$$

$$4) x'^2 + y'^2 = 0;$$

$$5) x'^2 = 0.$$

Эти уравнения называются **нормальными уравнениями** соответствующей фигуры. В § 4.2 отмечалось, что для каждой фигуры Φ на проективной плоскости ее уравнение в однородных координатах относительно базиса $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ совпадает с уравнением в репере $(O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ конической фигуры $\hat{\Phi}$, состоящей из всех прямых связи, которые образуют фигуру Φ .

Уравнение 1) задает конус второго порядка K в пространстве E^3 , следовательно, это уравнение задает также множество прямых пучка – образующих этого конуса (рис. 4.3.1). Фигура на проективной плоскости с уравнением 1) называется **овальной линией**.

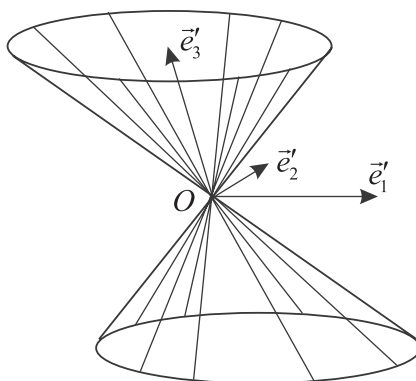


Рис. 4.3.1

Уравнение 2) не имеет ненулевых решений в области вещественных чисел. По аналогии с мнимым эллипсом и мнимым эллипсоидом фигура на проективной плоскости с уравнением 2) называется **мнимой овальной линией**.

Уравнение 3) задает пару пересекающихся плоскостей в пространстве E^3 , следовательно, это уравнение задает также множество прямых пучка, лежащих в этих плоскостях. Таким образом, уравнение 3) – это уравнение **пары проективных прямых** (рис. 4.3.2).

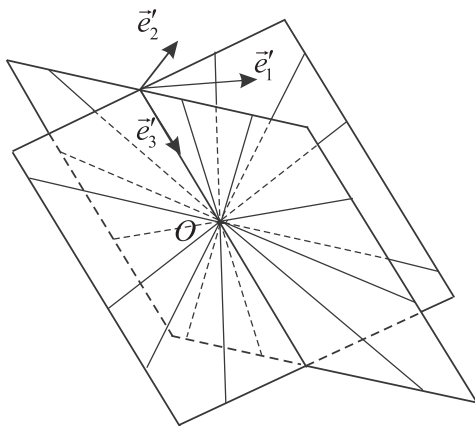


Рис. 4.3.2

Фигура с уравнением 4) называется **парой мнимых проективных прямых** (пересекающихся в действительной проективной точке). И, наконец, уравнение 5) задает **двойную проективную прямую**.

Выясним, как выглядят перечисленные фигуры второго порядка на проективной плоскости в ее второй модели в зависимости от выбора той или иной евклидовой локальной карты.

Пусть Φ – овальная линия, заданная нормальным уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (4.3.3)$$

в однородных координатах относительно некоторого базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, т. е. множество прямых – образующих конуса второго порядка K с уравнением (4.3.3) в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Если E^2 – локальная карта, то относительно этой карты точки фигуры Φ делятся на собственные и несобственные. Поскольку плоскость E^2 не проходит через центр пучка (вершину конуса), то каждая образующая конуса либо пересекает плоскость E^2 в одной точке, либо не пересекает, т. е. параллельна плоскости E^2 . В первом случае получаем собственную точку фигуры Φ , во втором – несобственную. Следовательно, множество собственных точек овальной линии Φ совпадает с пересечением конуса K и плоскости E^2 , а множество несобственных точек овальной линии Φ совпадает с несобственными точками прямых на плоскости E^2 , параллельных тем образующим конуса K , которые не пересекаются с плоскостью E^2 . В зависимости от выбора плоскости E^2 возможны следующие три ситуации.

1. Плоскость E^2 пересекает все образующие конуса K . Тогда все точки овальной линии Φ собственные, составляющие эллипс на плоскости E^2 (рис. 4.3.3).

2. Плоскость E^2 параллельна двум образующим Δ_1 и Δ_2 конуса K . Тогда $E^2 \cap K$ – гипербола на плоскости E^2 , точки которой дают собственные точки овальной линии Φ . Асимптоты l_1 и l_2 этой гиперболы параллельны прямым Δ_1 и Δ_2 , точки ∞_{l_1} и ∞_{l_2} – несобственные точки овальной линии Φ (рис. 4.3.4).

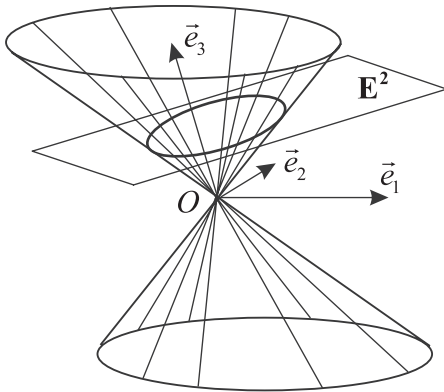


Рис. 4.3.3

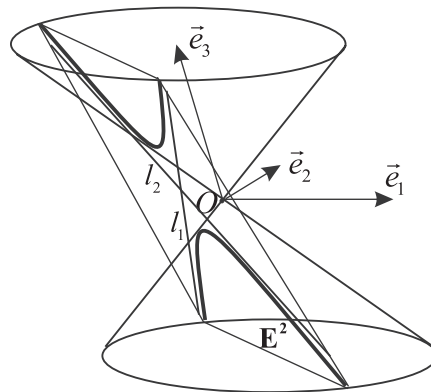


Рис. 4.3.4

3. Плоскость E^2 параллельна одной образующей Δ_0 конуса K . Тогда $E^2 \cap K$ – парабола на плоскости E^2 , точки которой дают собственные точки овальной линии Φ . Ось l_0 этой параболы параллельна прямой Δ_0 , точка ∞_{l_0} – несобственная точка овальной линии Φ (рис. 4.3.5).

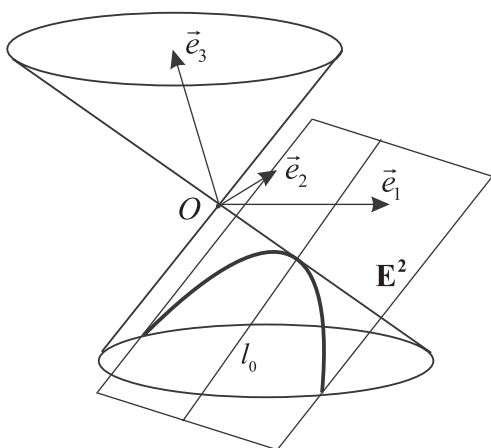


Рис. 4.3.5

Сказанное выше еще раз подчеркивает общность эллипса, гиперболы и параболы, на этот раз с точки зрения проективной геометрии: **каждая из трех фигур – эллипс, гипербола и парабола на евклидовой плоскости – это множество собственных точек в подходящей локальной карте E^2 некоторой овальной линии на проективной плоскости RP^2 .**

Пусть Φ – пара проективных прямых, заданных нормальным уравнением

$$x^2 - y^2 = 0$$

в однородных координатах относительно некоторого базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, т. е. множество прямых пучка, лежащих в двух плоскостях π_1 и π_2 с уравнениями соответственно $y = x$ и $y = -x$ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Плоскости π_1 и π_2 пересекаются по оси Oz . Если E^2 плоскость в пространстве E^3 , не проходящая через точку O , то возможны следующие три ситуации.

1. Плоскость E^2 пересекает пару плоскостей π_1 и π_2 по двум пересекающимися прямым l_1 и l_2 , точки которых дают собственные точки фигуры Φ . Точки ∞_{l_1} и ∞_{l_2} – несобственные точки фигуры Φ (рис. 4.3.6).

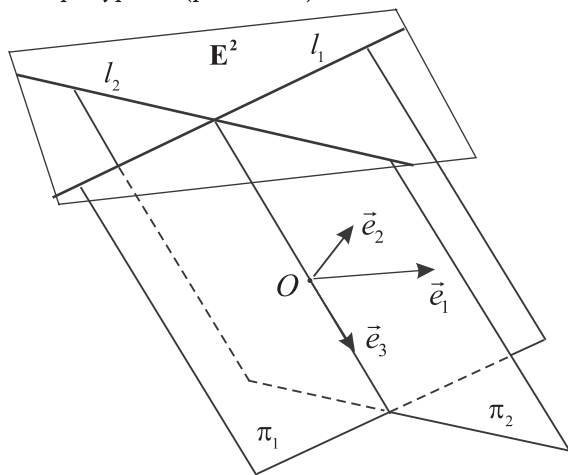


Рис. 4.3.6

2. Плоскость E^2 пересекает пару плоскостей π_1 и π_2 по двум параллельными прямыми l_1 и l_2 , точки которых дают собственные точки фигуры Φ . Точка $\infty_{l_1} = \infty_{l_2}$ – несобственная точка фигуры Φ (рис. 4.3.7).

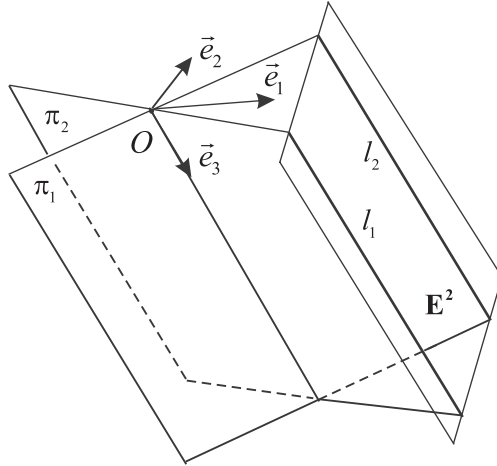


Рис. 4.3.7

3. Плоскость E^2 параллельна одной из плоскостей, допустим π_1 , и пересекает плоскость π_2 по прямой l_0 . Тогда точки прямой l_0 дают собственные точки фигуры, а несобственные точки фигуры Φ образуют несобственную прямую l_∞ (рис. 4.3.8).

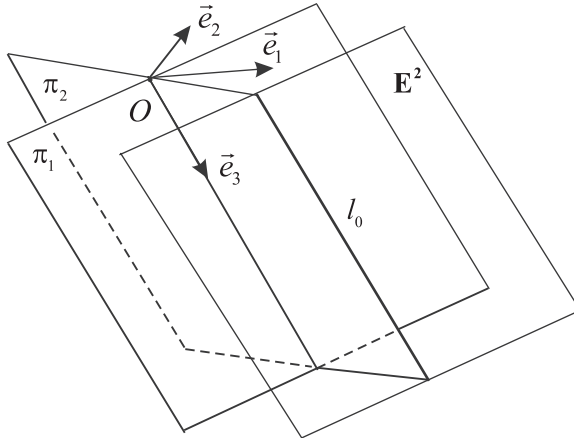


Рис. 4.3.8

Пусть Φ – двойная проективная прямая, заданная нормальным уравнением

$$z^2 = 0 \quad (4.3.4)$$

в однородных координатах относительно некоторого базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, т. е. множество прямых пучка, лежащих в плоскости Ox_1x_2 аффинного репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда если евклидова карта E^2 пересекает плоскость Ox_1x_2 по прямой l_0 , то фигура Φ изображается в этой карте (двойной) прямой l_0 , дополненной (двойной) несобственной точкой ∞_{l_0} . Если же евклидова карта E^2 параллельна плоскости Ox_1x_2 , то фигура Φ изображается в этой карте (двойной) несобственной прямой l_∞ .

ГЛАВА 5

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ

В этой главе будут рассмотрены геометрические преобразования плоскости и пространства двух типов: *аффинные преобразования* (при таких преобразованиях сохраняются прямые, т. е. каждая прямая преобразуется в прямую) и *движения* (при таких преобразованиях сохраняются расстояния между точками). Будут определены и описаны также аффинные преобразования и движения прямой. Помимо геометрии и других разделов математики геометрические преобразования широко используются в приложениях, например, в компьютерной геометрии для *визуализации* (построения изображений) и для передачи движения на экране.

§ 5.1. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ E^2 И ПРОСТРАНСТВА E^3

Определение 5.1.1. *Отображение*

$$f : E^2 \rightarrow E^2 \text{ (или } f : E^3 \rightarrow E^3 \text{)}, M \mapsto f(M) = M',$$

называется **аффинным преобразованием** плоскости E^2 (или пространства E^3), если выполняются два условия:

- (i) f – биекция;
- (ii) отображение f сохраняет коллинеарность точек, т. е. для любых точек A, B, C , лежащих на одной прямой, их образы $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$ также лежат на одной прямой (рис. 5.1.1).

Для прямой E^1 определение аффинного преобразования в такой форме не годится, поскольку любое отображение $f : E^1 \rightarrow E^1$ прямой в себя сохраняет коллинеарность точек. Поэтому каждая биекция прямой на себя удовлетворяет определению 5.1.1. Однако не любое биективное отображение $f : E^1 \rightarrow E^1$ принято считать аффинным преобразованием. Определение аффинного преобразования прямой будет дано далее.

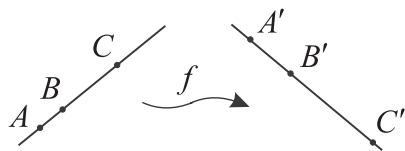


Рис. 5.1.1

Аффинными преобразованиями является большинство из известных нам геометрических отображений. Таковы, очевидно, следующие преобразования:

- тождественные отображения плоскости Id_{E^2} и пространства Id_{E^3} ;
- параллельные переносы плоскости и пространства;
- повороты плоскости E^2 на различные углы вокруг неподвижной точки;
- повороты пространства E^3 на различные углы вокруг неподвижной прямой;
- симметрии относительно точки, прямой или плоскости; сжатия плоскости к некоторой прямой;
- сжатия пространства к некоторой плоскости.

Не будут аффинными преобразованиями проекции, которые рассматривались в § 1.3, поскольку они не биективны. Биективное отображение, заданное в прямоугольной системе координат формулой

$$f: E^2 \rightarrow E^2, M(x, y) \mapsto M'(x, y + x^2),$$

не является аффинным преобразованием. При этом преобразовании ось Ox , а также параллельные ей прямые переходят в параболы (рис. 5.1.2). Для отмеченных на рисунке коллинеарных точек A, B, C их образы A', B', C' не коллинеарны.

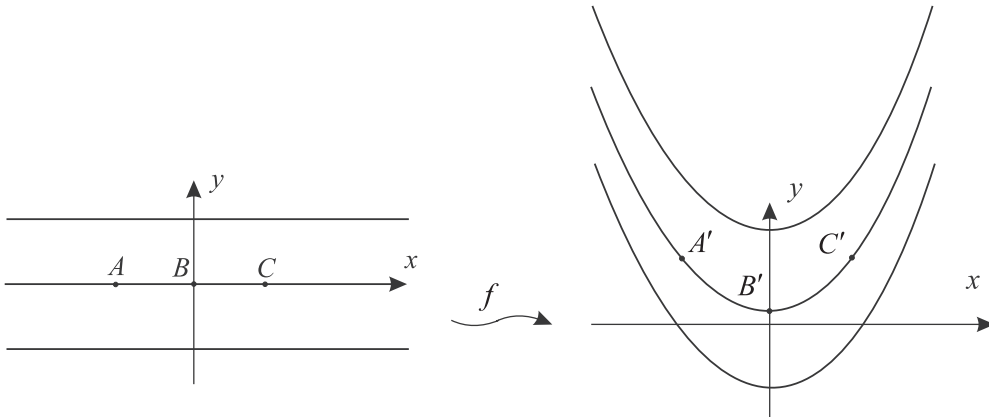


Рис. 5.1.2

Наряду с аффинными преобразованиями плоскости можно рассматривать биективные аффинные отображения одной плоскости π_1 в другую плоскость π_2 , т. е. такие биективные отображения $f: \pi_1 \rightarrow \pi_2$, которые сохраняют коллинеарность точек. Примером может служить проектирование одной плоскости π_1 на другую плоскость π_2 параллельно прямой Δ при условии, что $\Delta \nparallel \pi_1$ и $\Delta \nparallel \pi_2$ (рис. 5.1.3). На такие отображения с небольшими изменениями переносится все то, что говорится ниже об аффинных преобразованиях плоскости.

При изучении свойств аффинных преобразований будет полезна следующая лемма.

Лемма 5.1.1. (i) Пусть $f: E^2 \rightarrow E^2$ – отображение плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность точек. Если существуют три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, такие, что их образы $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ лежат на одной прямой Δ' , то f отображает всю плоскость в прямую $\Delta': f(E^2) \subset \Delta'$.

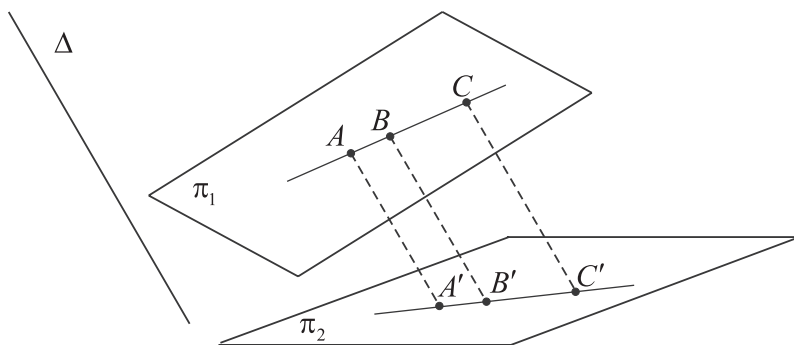


Рис. 5.1.3

(ii) Пусть $f: \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{E}^3$ – отображение пространства в себя, сохраняющее коллинеарность точек. Если существуют четыре точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости, такие, что их образы $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$ лежат в одной плоскости π' , то f отображает все пространство в плоскость π' : $f(\mathbf{E}^3) \subset \pi'$.

Доказательство. (i) Пусть Δ_1 и Δ_2 – прямые, проходящие соответственно через пары точек A и B , A и C (рис. 5.1.4). Поскольку отображение f сохраняет коллинеарность точек, то $f(\Delta_1) \subset \Delta'$, $f(\Delta_2) \subset \Delta'$. Если M – произвольная точка плоскости \mathbf{E}^2 , не лежащая на прямых Δ_1 и Δ_2 , то существует прямая, проходящая через точку M и пересекающая прямые Δ_1 и Δ_2 в точках P и Q соответственно. Поскольку f сохраняет коллинеарность точек и $f(P), f(Q) \in \Delta'$, то и $f(M) \in \Delta'$. Это означает, что $f(\mathbf{E}^2) \subset \Delta'$.

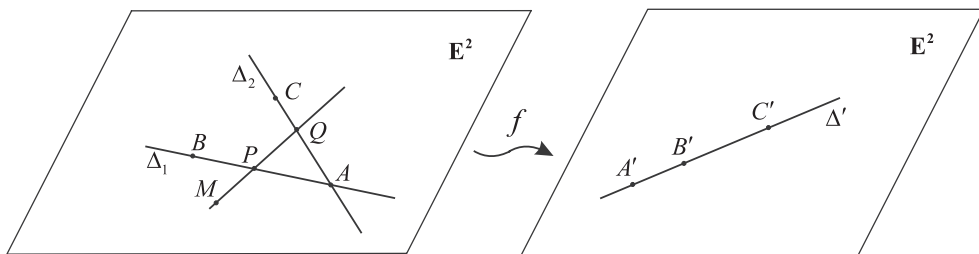


Рис. 5.1.4

(ii) Пусть π – плоскость, в которой лежат точки A, B, C (рис. 5.1.5). Обозначим Δ_1 и Δ_2 – прямые, проходящие соответственно через пары точек A и B , A и C . Так как отображение f сохраняет коллинеарность точек, то $f(\Delta_1) \subset \pi'$, $f(\Delta_2) \subset \pi'$. Поскольку через любую точку M плоскости можно провести прямую, пересекающую прямые Δ_1 и Δ_2 в точках P и Q (см. рис. 5.1.4), то вновь используя то, что f сохраняет коллинеарность точек, получаем, что $f(M) \in \pi'$. Так как M – любая точка плоскости π , то $f(\pi) \subset \pi'$. Пусть теперь N – произвольная точка пространства \mathbf{E}^3 , отличная от точки D и такая, что прямая Δ^3 , проходящая через N и D , пересекает плоскость π в точке P (см. рис. 5.1.5).

Поскольку отображение f сохраняет коллинеарность точек, то $f(N) \in \pi'$. Если же Δ_3 не пересекает плоскость π (т. е. $\Delta_3 \parallel \pi$), то через точку N можно провести прямую Δ_4 , пересекающую плоскость π . Поскольку, по доказанному выше, $f(\Delta_4 \setminus \{N\}) \subset \pi'$, то и $f(N) \in \pi'$. Получим, что $f(\mathbf{E}^3) \subset \pi'$. ►

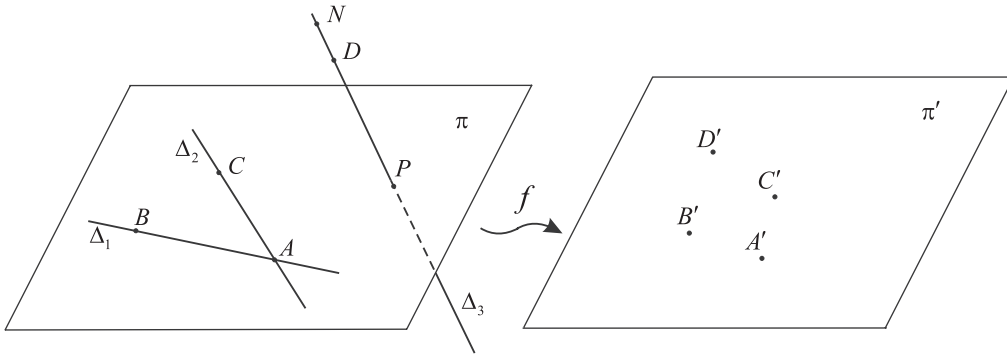


Рис. 5.1.5

Поскольку аффинное преобразование биективно, получаем следствие леммы.

Следствие 5.1.1. (i) Аффинное преобразование плоскости E^2 любые три неколлинеарные точки переводит в неколлинеарные точки.

(ii) Аффинное преобразование пространства E^3 любые четыре некомпланарные точки переводит в некомпланарные точки.

Пункт (i) справедлив также для аффинного преобразования одной плоскости в другую.

Утверждение 5.1.1. Пусть $f, g : E^n \rightarrow E^n$, $n = 2, 3$, – аффинные преобразования. Тогда

(i) $g \circ f : E^n \rightarrow E^n$ – аффинное преобразование;

(ii) $f^{-1} : E^n \rightarrow E^n$ – аффинное преобразование.

Доказательство. (i) Отображение $g \circ f$ биективно как композиция двух биекций. Пусть A, B, C – три точки одной прямой. Поскольку отображение f сохраняет коллинеарность точек, то $f(A), f(B), f(C)$ – точки одной прямой. Так как отображение g сохраняет коллинеарность точек, то $g(f(A)), g(f(B)), g(f(C))$ – также точки одной прямой. Это означает, что $(g \circ f)(A), (g \circ f)(B), (g \circ f)(C)$ – точки одной прямой, т. е. отображение $g \circ f$ сохраняет коллинеарность точек.

(ii) Поскольку f – биекция, то для f существует обратное отображение f^{-1} , которое также является биекцией. То, что f^{-1} сохраняет коллинеарность точек, докажем методом *от противного*. Рассмотрим случай плоскости. Предположим, что $f^{-1} : E^2 \rightarrow E^2$ не сохраняет коллинеарность точек, т. е. существуют три точки A', B', C' одной прямой Δ' такие, что точки $f^{-1}(A') = A$, $f^{-1}(B') = B$, $f^{-1}(C') = C$ не лежат на одной прямой (см. рис. 5.1.4). Это означает, что отображение f неколлинеарные точки A, B, C переводит в точки одной прямой. Это противоречит следствию 5.1.1.

Аналогичные рассуждения, провести которые предлагается читателю в качестве упражнения, показывают, что предположение о том, что $f^{-1} : E^3 \rightarrow E^3$ не сохраняет коллинеарность точек, противоречит биективности отображения f . ►

Обозначим $\text{Aff}(2)$ и $\text{Aff}(3)$ множества всех аффинных преобразований плоскости E^2 и пространства E^3 соответственно.

Следствие 5.1.2. $\text{Aff}(2)$ и $\text{Aff}(3)$ – группы относительно композиции преобразований.

Утверждение 5.1.2. (i) При аффинном преобразовании образом прямой является прямая, образом плоскости – плоскость.

(ii) При аффинном преобразовании сохраняется параллельность прямых и плоскостей.

Доказательство. (i) Пусть $f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$, $n = 2, 3$, – аффинное преобразование, Δ – прямая на плоскости \mathbf{E}^2 или в пространстве \mathbf{E}^3 . Пусть A и B – две точки прямой Δ . Тогда $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$ – две различные точки, через которые проходит единственная прямая Δ' . Поскольку f сохраняет коллинеарность точек, то $f(\Delta) \subset \Delta'$. Предположим, что $f(\Delta) \neq \Delta'$. Тогда, в силу сюръективности отображения f , существует точка $C \in \mathbf{E}^n$, $C \notin \Delta$, такая, что $C' = f(C) \in \Delta'$. Это противоречит следствию 5.1.1, поэтому можно утверждать, что $f(\Delta) = \Delta'$.

Пусть $f: \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{E}^3$ – аффинное преобразование, π – плоскость в пространстве \mathbf{E}^3 , A, B, C – три точки плоскости π , не лежащие на одной прямой. Тогда их образы A', B', C' – также три точки, не лежащие на одной прямой, иначе получим противоречие с пунктом (ii) следствия 5.1.1. Итак, существует единственная плоскость π' , проходящая через точки A', B', C' . Рассуждения, которые проводились в доказательстве леммы 5.1.1, показывают, что $f(\pi) \subset \pi'$. Предположим, что $f(\pi) \neq \pi'$. Тогда, в силу сюръективности отображения f , существует точка $D \in \mathbf{E}^3$, $D \notin \pi$, такая, что $D' = f(D) \in \pi'$. Это означает, что отображение f некомпланарные точки A, B, C, D переводит в точки одной плоскости π' . Это противоречит следствию 5.1.1, поэтому $f(\pi) = \pi'$.

Часть (ii) очевидно вытекает из (i) и из того факта, что аффинное преобразование биективно. ►

Следствие 5.1.3. При аффинном преобразовании образом параллелограмма является параллелограмм, т. е. если $f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$, $n = 2, 3$, – аффинное преобразование и $ABCD$ – параллелограмм, то $A'B'C'D'$ – также параллелограмм.

Утверждение 5.1.3. При аффинном преобразовании сохраняется эквивалентность направленных отрезков, т. е. если $f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$, $n = 2, 3$, – аффинное преобразование, $A, B, C, D \in \mathbf{E}^n$ и $AB \sim CD$, то $A'B' \sim C'D'$.

Доказательство утверждения 5.1.3 основано на следствии 5.1.3. При этом можно использовать следующий критерий эквивалентности направленных отрезков.

Лемма 5.1.2. Пусть $A, B, C, D \in \mathbf{E}^n$. Тогда $(AB \sim CD) \Leftrightarrow$ (либо $ABDC$ – параллелограмм, либо существуют точки E, F , такие, что $ABFE$ и $CDFE$ – параллелограммы).

Доказательство леммы предлагается в качестве упражнения.

§ 5.2. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР, ИНДУЦИРОВАННЫЙ АФФИННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Пусть $f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$, $n = 2, 3$, – аффинное преобразование. Определим отображение множества векторов $\mathbf{V}(\mathbf{E}^n)$ в себя по формуле

$$\varphi_f: \mathbf{V}(\mathbf{E}^n) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^n), \overline{AB} \mapsto \overline{A'B'}. \quad (5.2.1)$$

Здесь, как и ранее, штрихом обозначен образ соответствующей точки при отображении f . Корректность определения отображения φ_f обеспечивает утверждение 5.1.3.

Теорема 5.2.1. Отображение $\varphi_f: \mathbf{V}(\mathbf{E}^n) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^n)$, $\vec{a} \mapsto \varphi_f(\vec{a})$, которое определяется формулой (5.2.1), обладает свойствами:

$$(i) \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^n) \quad \varphi_f(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi_f(\vec{a}) + \varphi_f(\vec{b});$$

$$(ii) \forall \vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^n), \forall k \in \mathbf{R} \quad \varphi_f(k\vec{a}) = k\varphi_f(\vec{a}).$$

Другими словами, теорема 5.2.1 означает, что отображение φ_f является *линейным оператором*.

Доказательство. (i) Истинность пункта (i) следует из определения отображения φ_f и правила треугольника для сложения векторов. Действительно, пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. По определению отображения φ_f имеем

$$\varphi_f(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \varphi_f(\vec{a}) + \varphi_f(\vec{b}).$$

(ii) Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то (ii) является верным равенством $\vec{0} = \vec{0}$. При $k = 1$ равенство (ii) также верно. Далее доказываем (ii) в несколько шагов при условии, что $\vec{a} \neq \vec{0}$, $k \neq 0, 1$.

Шаг 1. Векторы $\varphi_f(k\vec{a})$ и $\varphi_f(\vec{a})$ коллинеарны, т. е.

$$\varphi_f(k\vec{a}) = \alpha \varphi_f(\vec{a}) \quad (5.2.2)$$

для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}$.

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, тогда $k\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, где A, B, C – три точки одной прямой. Поскольку отображение f биективно и сохраняет коллинеарность точек, то A', B', C' – также три точки одной прямой. Следовательно, $\varphi_f(k\vec{a}) = \overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'} = \alpha \varphi_f(\vec{a})$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}$.

Шаг 2. Если для какого-то вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ коэффициент пропорциональности векторов $\varphi_f(k\vec{a})$ и $\varphi_f(\vec{a})$ равен α , т. е. верно равенство $\varphi_f(k\vec{a}) = \alpha \varphi_f(\vec{a})$, то и для любого другого вектора \vec{b} верно такое же равенство $\varphi_f(k\vec{b}) = \alpha \varphi_f(\vec{b})$.

Проведем доказательство для случая, когда векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны. Отложим эти векторы от некоторой точки O . Получим соответственно точки A и B такие, что AOB – треугольник, причем $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Отложим от точки O также векторы $k\vec{a}$ и $k\vec{b}$. Получим второй треугольник COD , причем $k\vec{a} = \overrightarrow{OC}$, $k\vec{b} = \overrightarrow{OD}$. Построенные треугольники подобны, так как они имеют равный угол O и пропорциональные стороны $|OC| = |k| \cdot |OA|$, $|OD| = |k| \cdot |OB|$. Следовательно, $AB \parallel CD$ (рис. 5.2.1).

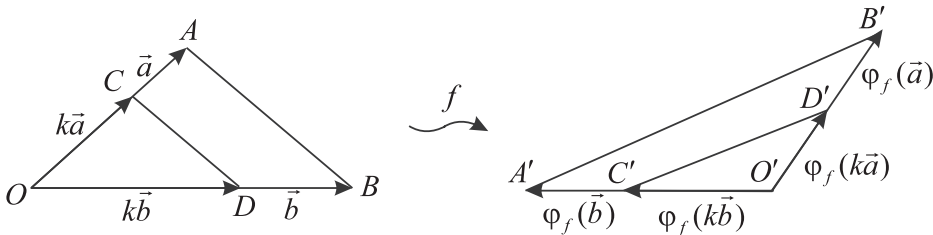


Рис. 5.2.1

Переходя к образам точек O, A, B, C, D при отображении f , получим, очевидно, два треугольника $A'O'B'$ и $C'O'D'$ (см. рис. 5.2.1). Поскольку отображение f сохраняет параллельность прямых, то $A'B' \parallel C'D'$, и, следовательно, треугольники $A'O'B'$ и $C'O'D'$ подобны (три угла одного треугольника соответственно равны трем углам второго). Если λ – коэффициент подобия этих треугольников, то

$$\begin{aligned}\varphi_f(k\vec{a}) &= \overline{O'C'} = \alpha \cdot \overline{O'A'} = \alpha \varphi_f(\vec{a}), \\ \varphi_f(k\vec{b}) &= \overline{O'D'} = \alpha \cdot \overline{O'B'} = \alpha \varphi_f(\vec{b}),\end{aligned}$$

где $\alpha = \pm \lambda$.

Если же векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то можно выбрать вектор \vec{c} , не коллинеарный \vec{a} и \vec{b} . По доказанному выше утверждение шага 2 верно для пар векторов \vec{a} и \vec{c} , а также \vec{b} и \vec{c} . Следовательно, утверждение шага 2 верно для \vec{a} и \vec{b} .

Из доказанного на втором шаге следует, что число α в равенстве (5.2.2) не зависит от вектора \vec{a} , но, возможно, зависит от k , т. е.

$$\forall \vec{a} \quad \varphi_f(k\vec{a}) = \alpha(k) \varphi_f(\vec{a}),$$

где $\alpha: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, k \mapsto \alpha(k)$ – некоторая функция на \mathbf{R} . Для доказательства (ii) осталось показать, что α – тождественное отображение. Прежде всего отметим очевидные равенства: $\alpha(1) = 1$, $\alpha(0) = 0$. Кроме того, если $k \neq 0$, то $\alpha(k) \neq 0$ (иначе отображение f не будет инъективным).

Шаг 3. Для любых $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ верны равенства

$$\alpha(k_1 + k_2) = \alpha(k_1) + \alpha(k_2); \quad \alpha(k_1 k_2) = \alpha(k_1) \alpha(k_2).$$

Пусть \vec{a} – ненулевой вектор. Тогда верны равенства

$$\begin{aligned}\varphi_f((k_1 + k_2)\vec{a}) &= \alpha(k_1 + k_2) \varphi_f(\vec{a}); \\ \varphi_f((k_1 + k_2)\vec{a}) &= \varphi_f(k_1\vec{a} + k_2\vec{a}) = \varphi_f(k_1\vec{a}) + \varphi_f(k_2\vec{a}) = (\alpha(k_1) + \alpha(k_2)) \varphi_f(\vec{a}); \\ \varphi_f((k_1 k_2)\vec{a}) &= \alpha(k_1 k_2) \varphi_f(\vec{a}); \\ \varphi_f((k_1 k_2)\vec{a}) &= \varphi_f(k_1(k_2\vec{a})) = \alpha(k_1) \varphi_f(k_2\vec{a}) = (\alpha(k_1) \alpha(k_2)) \varphi_f(\vec{a}).\end{aligned}$$

Учитывая, что $\varphi_f(\vec{a}) \neq \vec{0}$, из первых двух равенств получаем $\alpha(k_1 + k_2) = \alpha(k_1) + \alpha(k_2)$, а из двух последних $\alpha(k_1 k_2) = \alpha(k_1) \alpha(k_2)$.

На алгебраическом языке утверждение шага 3 (с учетом того, что $\alpha(1) = 1$, $\alpha(0) = 0$) означает, что отображение α – автоморфизм поля вещественных чисел \mathbf{R} .

Заключительный, четвертый, шаг в доказательстве пункта (ii) теоремы 5.2.1 представляет самостоятельный интерес.

Шаг 4 (**лемма Дарбу**). Единственным автоморфизмом поля \mathbf{R} является тождественное отображение.

Доказательство леммы Дарбу будет заключаться в том, что мы последовательно покажем, что отображение α тождественно действует на натуральные числа, затем на целые, рациональные и, наконец, на все вещественные числа.

Пусть $k \in \mathbf{N}$. Тогда, по доказанному на шаге 3, имеем

$$\alpha(k) = \alpha(\underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha(1) + \alpha(1) + \dots + \alpha(1)}_{k \text{ раз}} = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ раз}} = k.$$

Поскольку $0 = \alpha(0) = \alpha(1 + (-1)) = \alpha(1) + \alpha(-1)$, то $\alpha(-1) = -1$. Далее $\alpha(-k) = \alpha((-1)k) = \alpha(-1)\alpha(k) = -k$. Итак, мы показали, что $\alpha(k) = k$ для любого $k \in \mathbf{Z}$.

Пусть $k \in \mathbf{Q}$. Тогда $k = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, и $p = kq$. По доказанному выше имеем $p = \alpha(p) = \alpha(k)\alpha(q) = \alpha(k)q$, т. е. $\alpha(k) = k$.

Если $k > 0$, то $\alpha(k) = \alpha(\sqrt{k})\alpha(\sqrt{k}) > 0$. Таким образом, отображение α положительные числа переводит в положительные.

Пусть теперь k – любое вещественное число. Допустим, что $\alpha(k) \neq k$, для определенности $k < \alpha(k)$. Между двумя различными вещественными числами k и $\alpha(k)$ можно выбрать рациональное число r , $k < r < \alpha(k)$. Тогда $r - k > 0$, однако $\alpha(r - k) = r - \alpha(k) < 0$, т. е. образ положительного числа $r - k$ есть отрицательное число. Это противоречит доказанному выше, следовательно, допущение $\alpha(k) \neq k$ неверно, т. е. $\alpha(k) = k$. ►

Определение 5.2.1. Отображение φ_f называется **линейным оператором, индуцированным аффинным преобразованием f** .

Утверждение 5.2.1. (i) Если f и g – аффинные преобразования, то $\varphi_{g \circ f} = \varphi_g \circ \varphi_f$.

(ii) Линейный оператор φ_f , индуцированный аффинным преобразованием f , биективен, и $(\varphi_f)^{-1} = \varphi_{f^{-1}}$.

(iii) Линейный оператор φ_f сохраняет свойства системы векторов быть линейно зависимой либо линейно независимой.

Доказательство. (i) Пусть $\vec{a} = \overline{AB}$ – произвольный вектор; $A' = f(A)$, $A'' = g(f(A)) = (g \circ f)(A)$; $B' = f(B)$, $B'' = g(f(B)) = (g \circ f)(B)$.

Тогда $(\varphi_g \circ \varphi_f)(\vec{a}) = \varphi_g(\varphi_f(\overline{AB})) = \varphi_g(\overline{A'B'}) = \overline{A''B''} = (\varphi_{g \circ f})(\vec{a})$.

(ii) Применим пункт (i) к равенству $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{E}^n}$ и учтем, что $\varphi_{Id} = Id_{V(\mathbb{E}^n)}$.

(iii) Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависима и $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$ – нетривиальная линейная комбинация этих векторов. Тогда, применяя пункты (i) и (ii) теоремы 5.2.1, получаем, что $\lambda_1 \varphi_f(\vec{a}_1) + \lambda_2 \varphi_f(\vec{a}_2) + \dots + \lambda_k \varphi_f(\vec{a}_k) = \varphi_f(\vec{0}) = \vec{0}$. Таким образом, система векторов $\varphi_f(\vec{a}_1), \varphi_f(\vec{a}_2), \dots, \varphi_f(\vec{a}_k)$ также линейно зависима. Если же векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно независимы, то и $\varphi_f(\vec{a}_1), \varphi_f(\vec{a}_2), \dots, \varphi_f(\vec{a}_k)$ также линейно независимы. Действительно, если $\varphi_f(\vec{a}_1), \varphi_f(\vec{a}_2), \dots, \varphi_f(\vec{a}_k)$ линейно зависимы, то по уже доказанному, система векторов

$$(\varphi_{f^{-1}}(\varphi_f(\vec{a}_1))) = \vec{a}_1, (\varphi_{f^{-1}}(\varphi_f(\vec{a}_2))) = \vec{a}_2, \dots, (\varphi_{f^{-1}}(\varphi_f(\vec{a}_k))) = \vec{a}_k$$

линейно зависима, что приводит к противоречию. ►

Следствие 5.2.1. (i) Если $f: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ – аффинное преобразование плоскости и $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер, то $(f(O), \varphi_f(\vec{e}_1), \varphi_f(\vec{e}_2))$ – также аффинный репер.

(ii) Если $f: \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{E}^3$ – аффинное преобразование пространства и $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – аффинный репер, то $(f(O), \varphi_f(\vec{e}_1), \varphi_f(\vec{e}_2), \varphi_f(\vec{e}_3))$ – также аффинный репер.

Далее будет показано, что любое аффинное преобразование сохраняет не только коллинеарность трех точек прямой, но также отношение, в котором одна из точек делит отрезок, концами которого являются две другие. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть A, B, C – точки прямой Δ такие, что $B \neq C$. Тогда вектор \overline{CB} является базисом множества $\mathbf{V}(\Delta)$ всех векторов прямой Δ и поэтому для вектора $\overline{AC} \in \mathbf{V}(\Delta)$ единственным образом определяется его координата, т. е. число $\lambda \in \mathbf{R}$, такое, что

$$\overline{AC} = \lambda \overline{CB}. \quad (5.2.3)$$

Это число обозначается (ABC) и называется **простым отношением** точек A, B, C , взятых в данном порядке. Говорят также, что точка C **делит отрезок AB в отношении λ** . Отметим, что простое отношение определяется расстояниями между точками и их взаимным расположением. А именно:

$$\lambda = \frac{|AC|}{|CB|},$$

если точка C лежит между A и B ;

$$\lambda = -\frac{|AC|}{|CB|},$$

если точка C не лежит между A и B .

Из равенства (5.2.3) вытекает, что если точки A и B совпадают (т. е. отрезок AB нулевой), то для любой отличной от них точки C простое отношение (ABC) равно -1 .

Если же $A \neq B$, то простое отношение (ABC) может принимать всевозможные числовые значения, кроме -1 , в зависимости от положения точки C . Действительно, выберем на прямой Δ аффинный репер $(A, \vec{e} = \overline{AB})$. Тогда координаты точек A и B следующие: $A(0), B(1)$, точка $C(x)$ может иметь в качестве своей координаты x любое число, кроме 1 . Переходя к координатам векторов в базисе $\vec{e} = \overline{AB}$ из равенства (5.2.3) получим, что $\lambda = \frac{x}{1-x}$.

График зависимости λ от x (рис. 5.2.2, а) позволяет сделать следующие выводы:

- 1) если $C = A$, то $x = 0$ и $\lambda = 0$;
- 2) если C – внутренняя точка отрезка AB ,двигающаяся от A к B , то λ возрастает от 0 до $+\infty$. В частности, если C – середина отрезка AB , то $x = 0,5$ и $\lambda = 1$;
- 3) если C – внешняя точка отрезка AB ,двигающаяся от A к бесконечности, то λ убывает от 0 до -1 ;
- 4) если C – внешняя точка отрезка AB ,двигающаяся от B к бесконечности, то λ возрастает от $-\infty$ до -1 .

Зависимость простого отношения (ABC) от положения точки C показана также на рис. 5.2.2, б.

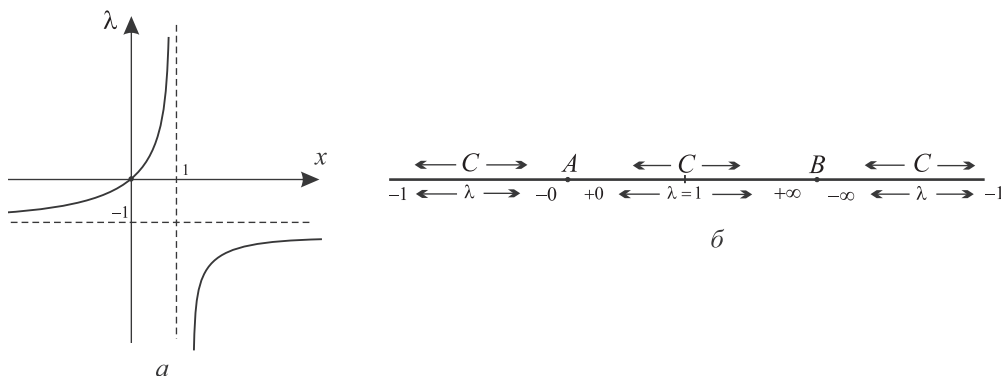


Рис. 5.2.2

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ заданы своими координатами в произвольном репере. Тогда из равенства (5.2.3) получим выражение простого отношения через координаты точек:

$$\lambda = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (5.2.4)$$

Из последних формул можно найти координаты точки $C(x_3, y_3, z_3)$, которая делит отрезок AB в данном отношении λ :

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Утверждение 5.2.2. При любом аффинном преобразовании сохраняется простое отношение точек.

Доказательство. Пусть $f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$, $n = 2, 3$, – аффинное преобразование; A, B, C – точки прямой $\Delta \subset \mathbf{E}^n$ и $\lambda = (ABC)$ – простое отношение точек A, B, C . Пусть A', B', C' – образы точек A, B, C соответственно при отображении f . Тогда точки A', B', C' лежат на прямой $f(\Delta)$ и $B' \neq C'$. По условию имеем $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$. Тогда

$$\overline{A'C'} = \varphi_f(\overline{AC}) = \varphi_f(\lambda \overline{CB}) = \lambda \varphi_f(\overline{CB}) = \lambda (\overline{C'B'}).$$

Приравнявая начало и конец последней цепочки равенств, получим, что $(A'B'C') = \lambda$. ►

Теперь дадим определение аффинного преобразования прямой.

Определение 5.2.2. Отображение $f: \mathbf{E}^1 \rightarrow \mathbf{E}^1$ называется **аффинным преобразованием** прямой \mathbf{E}^1 , если f сохраняет простое отношение точек.

Утверждение 5.2.3. Аффинное преобразование прямой $f: \mathbf{E}^1 \rightarrow \mathbf{E}^1$, $M(x) \mapsto M'(x')$, в любом аффинном репере (O, \vec{e}) задается формулой

$$x' = ax + \alpha, \quad a \neq 0. \quad (5.2.5)$$

Доказательство. Условие того, что f сохраняет простое отношение, означает, что для любых трех попарно различных точек $A, B, C \in \mathbf{E}^1$ их образы A', B', C' попарно различны и $(ABC) = (A'B'C')$. Возьмем точки $O(0)$ и $E(1)$. Пусть их образы имеют координаты $O'(\alpha)$ и $E'(\alpha + a)$, $a \neq 0$ соответственно. Пусть $M(x)$ – любая точка прямой, отличная от O и E . Согласно формуле (5.2.4),

$$(OEM) = \frac{x}{1-x} = \frac{x' - \alpha}{\alpha + a - x'} = (O'E'M'). \quad \text{Из этого равенства получим формулу (5.2.5).} \blacktriangleright$$

Упражнение 5.2.1. Докажите, что любое аффинное преобразование прямой $f: \mathbf{E}^1 \rightarrow \mathbf{E}^1$ в подходящем репере задается одной из двух формул:

- 1) $x' = x + \alpha$, f – параллельный перенос;
- 2) $x' = ax$, f – гомотетия с коэффициентом $a \neq 0$.

§ 5.3. КООРДИНАТНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ АФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть $f: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ – аффинное преобразование плоскости; $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер на плоскости \mathbf{E}^2 ; $M(x, y)$ – произвольная точка, $M'(x', y')$ – ее образ при

отображении f . Найдем связь между парами чисел (x', y') и (x, y) , т. е. координатами образа и прообраза. Будем считать, что нам дано, каким образом f действует на репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, т. е. известны следующие данные:

1) $f(O) = O'(\alpha_1, \alpha_2)$ – образ начальной точки репера при действии преобразования f ;

2) $\varphi_f(\vec{e}_1)(\alpha_{11}, \alpha_{21})$, $\varphi_f(\vec{e}_2)(\alpha_{12}, \alpha_{22})$ – образы базисных векторов репера при действии линейного оператора φ_f , индуцированного преобразованием f ; здесь $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ – координаты соответствующих векторов в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, в первом и втором столбцах которой стоят координаты векторов $\varphi_f(\vec{e}_1)$ и $\varphi_f(\vec{e}_2)$ соответственно, называется **матрицей линейного оператора** φ_f в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Отметим, что матрица A невырождена, т. е. $\det A \neq 0$, поскольку векторы $\varphi_f(\vec{e}_1)$ и $\varphi_f(\vec{e}_2)$ линейно независимы.

Для точек O, O', M' запишем равенство треугольника

$$\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} \quad (5.3.1)$$

и найдем координаты векторов, стоящих в левой и правой частях равенства (5.3.1) относительно базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Имеем

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2; \quad \overline{OM'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2; \quad \overline{OO'} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2. \\ \overline{O'M'} &= \varphi_f(\overline{OM}) = \varphi_f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x\varphi_f(\vec{e}_1) + y\varphi_f(\vec{e}_2) = \\ &= x(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2) + y(\alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2) = (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y)\vec{e}_1 + (\alpha_{21}x + \alpha_{22}y)\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Приравнявая координаты векторов, стоящих в левой и правой частях равенства (5.3.1), получаем, что истинны следующие равенства:

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_1, \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_2. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

В матричной записи формулы (5.3.2) имеют вид

$$(x') = A(x) + (\alpha), \quad (5.3.2')$$

где $(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x') = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ и $(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ – координатные столбцы точек M, M' и O' соответственно. Будем говорить, что формулы (5.3.2) (или (5.3.2')) – это **координатное задание аффинного преобразования** f в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Теорема 5.3.1. Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер на плоскости \mathbf{E}^2 .

(i) Любое аффинное преобразование $f: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ задается в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ формулами (5.3.2).

(ii) Обратно, отображение $f: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$, $M(x, y) \mapsto M'(x', y')$, где x', y' определяются по формулам (5.3.2) с условием $\det A \neq 0$, является аффинным преобразованием плоскости \mathbf{E}^2 .

Доказательство. Часть (i) была нами доказана до формулировки теоремы.

(ii) Во-первых, отображение f биективно, поскольку условие $\det A \neq 0$ позволяет выразить x, y через x', y' , т. е. построить обратное отображение для f :

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \beta_{11}x' + \beta_{12}y' + \beta_1, \\ y = \beta_{21}x' + \beta_{22}y' + \beta_2. \end{cases}$$

Во-вторых, если некоторая прямая Δ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задается уравнением $Ax + By + C = 0$, то ее образ при отображении f имеет уравнение

$$A(\beta_{11}x + \beta_{12}y + \beta_1) + B(\beta_{21}x + \beta_{22}y + \beta_2) + C = 0.$$

Очевидно, что последнее уравнение также является уравнением прямой. Следовательно, отображение f сохраняет коллинеарность точек. ►

Примеры

В примерах 1, 3, 5 формулы аффинного преобразования плоскости $f: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ записаны в произвольном аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, в примерах 2, 4, 6 – в ортонормированном репере (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$1. \tau_{\vec{a}} : \begin{cases} x' = x + \alpha_1, \\ y' = y + \alpha_2 \end{cases}$$

параллельный перенос плоскости на вектор \vec{a} , имеющий координаты (α_1, α_2) в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . (рис. 5.3.1).

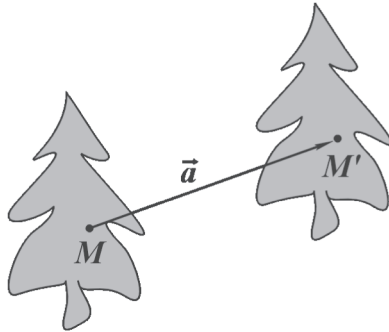


Рис. 5.3.1

Аффинное преобразование, которое задается формулой

$$f : \begin{cases} x' = k_1 x, \\ y' = k_2 y, \end{cases}$$

где k_1, k_2 – положительные числа, называется **масштабированием** (изменяется масштаб на осях координат). Отметим в примерах 2 и 3 следующие частные случаи масштабирования.

$$2. f_1 : \begin{cases} x' = x, \\ y' = ky \end{cases}$$

сжатие плоскости к оси Ox в направлении оси Oy с коэффициентом k , $(0 < k < 1)$;

$$f_2 : \begin{cases} x' = kx, \\ y' = y \end{cases}$$

растяжение плоскости от оси Oy в направлении оси Ox с коэффициентом k , $(k > 1)$ (рис. 5.3.2).

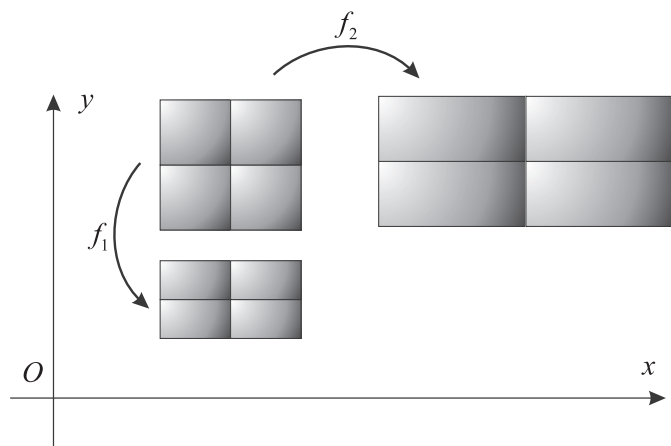


Рис. 5.3.2

$$3. f: \begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky \end{cases}$$

гомотетия плоскости с центром в точке O и коэффициентом $k, k > 0$ (рис. 5.3.3).

$$4. f: \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases}$$

симметрия плоскости относительно оси Ox (рис. 5.3.4.).

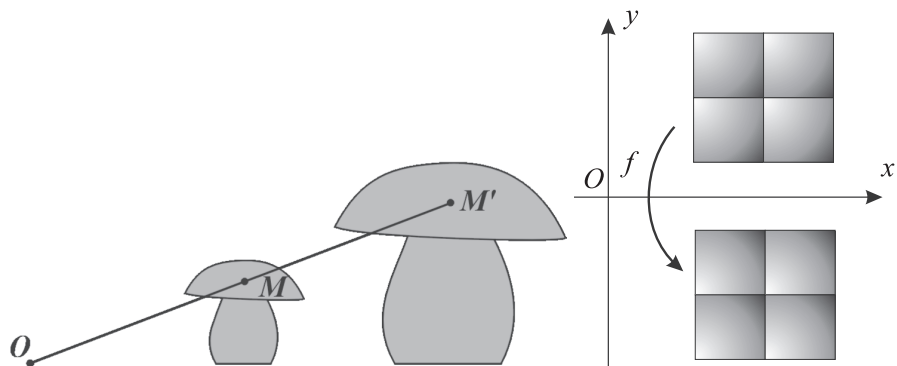


Рис. 5.3.3

Рис. 5.3.4

$$5. f: \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y \end{cases}$$

симметрия плоскости относительно точки O (рис. 5.3.5.).

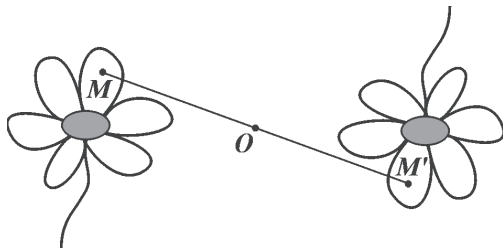


Рис. 5.3.5

$$6. f: \begin{cases} x' = x + ky, \\ y' = y - \end{cases}$$

сдвиг плоскости относительно оси Ox с коэффициентом $k, k > 0$ (рис. 5.3.6).

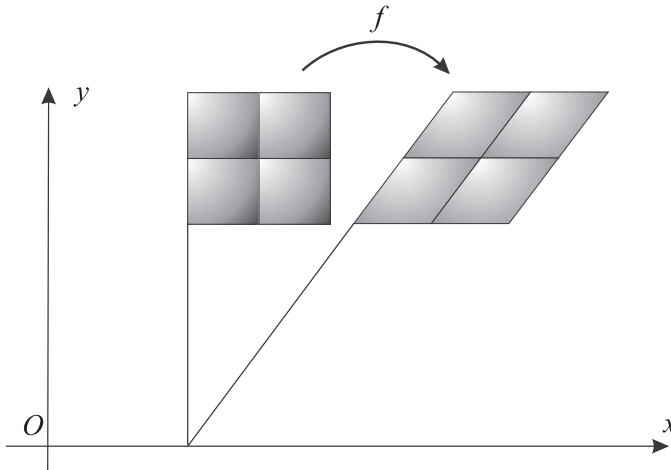


Рис. 5.3.6

$$7. f: \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha - \end{cases}$$

поворот плоскости на угол величиной α вокруг неподвижной точки – начала координат O (рис. 5.3.7).

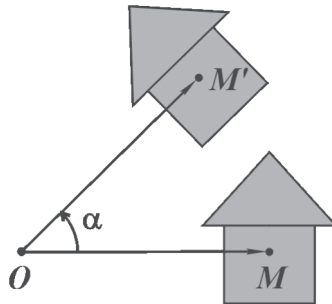


Рис. 5.3.7

Найдем теперь координатное выражение линейного оператора φ_f т. е. связь между координатами произвольного вектора $\vec{a}(l, m)$ и его образа $\varphi_f(\vec{a})(l', m')$ в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Если $\vec{a} = \overline{AB}$ для некоторых точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то

$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1, & l' &= x'_2 - x'_1, \\ m &= y_2 - y_1, & m' &= y'_2 - y'_1. \end{aligned}$$

Применяя для точек A и B формулы преобразования координат (5.3.2), получим

$$\begin{aligned} l' &= (\alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_1) - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1 + \alpha_1) = \alpha_{11}(x_2 - x_1) + \alpha_{12}(y_2 - y_1), \\ m' &= (\alpha_{21}x_2 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_2) - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_2) = \alpha_{21}(x_2 - x_1) + \alpha_{22}(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Таким образом, получим формулы

$$\begin{cases} l' = \alpha_{11}l + \alpha_{12}m, \\ m' = \alpha_{21}l + \alpha_{22}m. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

В матричном виде формулы (5.3.3) записываются так:

$$(l') = A(l). \quad (5.3.3')$$

Здесь $(l) = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ и $(l') = \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$ – координатные столбцы вектора \vec{a} и его образа $\varphi_f(\vec{a})$ соответственно. Будем говорить, что (5.3.3) (или (5.3.3')) – **координатное задание линейного оператора** φ_f в базисе (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Выясним, как изменяется матрица A линейного оператора φ_f при замене базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) на новый базис (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Пусть $(\tilde{l}) = \begin{pmatrix} \tilde{l} \\ \tilde{m} \end{pmatrix}$, $(\tilde{l}') = \begin{pmatrix} \tilde{l}' \\ \tilde{m}' \end{pmatrix}$ – координатные столбцы \vec{a} и его образа $\varphi_f(\vec{a})$ соответственно в новом базисе. Тогда, согласно формулам преобразования координат векторов (см. § 1.9), имеем

$$(l) = S(\tilde{l}) \text{ и } (l') = S(\tilde{l}'), \quad (5.3.4)$$

где S – матрица перехода от базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) к базису (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Подставляя (5.3.4) в (5.3.3'), имеем $S(\tilde{l}') = AS(\tilde{l})$. Умножая последнее равенство слева на матрицу S^{-1} , получаем $(\tilde{l}') = (S^{-1}AS)(\tilde{l})$. Сравнивая последнюю формулу с формулой (5.3.3'), можно утверждать, что справедлива следующая лемма.

Лемма 5.3.1. Пусть A и A' – матрицы линейного оператора φ_f в базисах (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) соответственно. Тогда верно равенство

$$A' = S^{-1}AS, \quad (5.3.5)$$

где S – матрица перехода от базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) к базису (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) .

Из формулы (5.3.5) следует, что $\det A' = \det A$, т. е. определитель матрицы линейного оператора φ_f не изменяется при замене базиса, следовательно, это число не зависит от базиса, а является инвариантом аффинного преобразования f . Его геометрический смысл выражается следующим утверждением.

Утверждение 5.3.1. Пусть аффинное преобразование f плоскости \mathbf{E}^2 в некотором репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задается формулами (5.3.2) (или (5.3.2')). Тогда верны следующие утверждения:

(i) преобразование f **сохраняет ориентацию плоскости** (т. е. для любого базиса (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) множества векторов $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ базисы (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) и $(\varphi_f(\vec{e}'_1), \varphi_f(\vec{e}'_2))$ одинаково ориентированы) тогда и только тогда, когда $\det A > 0$;

(ii) Для любого параллелограмма $ABCD$ его площадь S_{ABCD} и площадь $S_{A'B'C'D'}$ параллелограмма $A'B'C'D'$, являющегося образом исходного при отображении f , связаны равенством $S_{A'B'C'D'} = |\det A| S_{ABCD}$.

Доказательство. (i) Пусть (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) – произвольный базис множества векторов плоскости. По определению матрицы линейного оператора φ_f в базисе (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) она (т. е. согласно лемме 5.3.1, матрица $S^{-1}AS$) является матрицей перехода от

базиса (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) к базису $(\varphi_f(\vec{e}'_1), \varphi_f(\vec{e}'_2))$. Следовательно, по лемме 5.3.1, базисы (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) и $(\varphi_f(\vec{e}'_1), \varphi_f(\vec{e}'_2))$ одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда $\det(S^{-1}AS) = \det A > 0$.

(ii) Согласно утверждению 1.7.2, (ii), площади параллелограммов равны

$$S_{ABCD} = \left| \det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \right|, \quad S_{A'B'C'D'} = \left| \det \begin{pmatrix} l'_1 & l'_2 \\ m'_1 & m'_2 \end{pmatrix} \right|,$$

где $\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$ – координатные столбцы соответственно векторов \overline{AB} и \overline{AD} ,

$\begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l'_2 \\ m'_2 \end{pmatrix}$ – координатные столбцы преобразованных векторов $\varphi_f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ и

$\varphi_f(\overline{AD}) = \overline{A'D'}$ в каком-либо ортонормированном базисе (\vec{i}, \vec{j}) . Если A' – матри-

ца линейного оператора φ_f в базисе (\vec{i}, \vec{j}) , то $\begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l'_2 \\ m'_2 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$. Сле-

довательно, $\begin{pmatrix} l'_1 & l'_2 \\ m'_1 & m'_2 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ и

$$\det \begin{pmatrix} l'_1 & l'_2 \\ m'_1 & m'_2 \end{pmatrix} = \det A' \det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \det A \det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (5.3.6)$$

Переходя в равенстве (5.3.6) к модулям, завершаем доказательство пункта (ii). ►

Замечание 5.3.1. Утверждение пункта (ii) очевидным образом распространяется с параллелограммов на треугольники и многоугольники. Оно верно также для любой *квадрируемой* (имеющей площадь) фигуры Φ , т. е. такой, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольники P_1 и P_2 , разность площадей которых меньше ε , и такие, что $P_1 \subset \Phi \subset P_2$. К таким фигурам относится большинство фигур, известных из средней школы: круги, их секторы, сегменты, части плоскости, ограниченные графиками элементарных функций, и др.

Все, что говорилось выше о координатном выражении аффинного преобразования плоскости, с очевидными изменениями переносится на случай пространства. Приведем только основные формулы.

Если $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – аффинный репер в пространстве \mathbf{E}^3 , то множество всех аффинных преобразований пространства совпадает с множеством отображений $f: \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{E}^3, M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$, которые задаются в этом репере формулами

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_1, \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_2, \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_3, \end{cases} \quad (5.3.7)$$

причем $\det(\alpha_{ij}) = \det A \neq 0$. Координатная запись линейного оператора

$$\varphi_f: \mathbf{V}(\mathbf{E}^3) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^3), \vec{a}(l, m, n) \mapsto (\varphi_f(\vec{a}))(l', m', n'),$$

индуцированного преобразованием f , имеет вид

$$\begin{cases} l' = \alpha_{11}l + \alpha_{12}m + \alpha_{13}n, \\ m' = \alpha_{21}l + \alpha_{22}m + \alpha_{23}n, \\ n' = \alpha_{31}l + \alpha_{32}m + \alpha_{33}n. \end{cases} \quad (5.3.8)$$

Матричная запись формул (5.3.7) и (5.3.8) совпадает с формулами (5.3.2') и (5.3.3') соответственно.

§ 5.4. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ E^2 И ПРОСТРАНСТВА E^3

Определение 5.4.1. *Отображение $f : E^2 \rightarrow E^2$ (или $f : E^3 \rightarrow E^3$) называется движением, если это отображение сохраняет расстояние между точками, т. е. для любых точек A, B выполняется равенство $d(A, B) = d(f(A), f(B))$.*

Из определения вытекает, что если точки A и B различны, т. е. $d(A, B) > 0$, то и $d(f(A), f(B)) = d(A, B) > 0$, т. е. образы точек также различны. Это означает, что движение есть инъективное отображение. Далее мы убедимся, что любое движение является аффинным преобразованием, т. е. биективным отображением, сохраняющим коллинеарность точек.

Следующая лемма показывает, что взаимное расположение трех точек полностью определяется расстояниями между ними.

Лемма 5.4.1. *Пусть A, B, C – три произвольные точки. Обозначим следующим образом расстояния между ними:*

$$d_1 = d(B, C), \quad d_2 = d(A, C), \quad d_3 = d(A, B).$$

(i) *Точки A, B, C неколлинеарны тогда и только тогда, когда выполняются три неравенства:*

- 1) $d_1 + d_2 > d_3$;
- 2) $d_1 + d_3 > d_2$;
- 3) $d_2 + d_3 > d_1$.

(ii) *Точки A, B, C коллинеарны тогда и только тогда, когда в точности одно из неравенств 1) – 3) переходит в равенство. При этом:*

$$d_1 + d_2 = d_3 \Leftrightarrow \text{точка } C \text{ лежит между } A \text{ и } B;$$

$$d_1 + d_3 = d_2 \Leftrightarrow \text{точка } B \text{ лежит между } A \text{ и } C;$$

$$d_2 + d_3 = d_1 \Leftrightarrow \text{точка } A \text{ лежит между } B \text{ и } C.$$

Доказательство. Часть (i) является известным критерием того, когда три отрезка могут быть сторонами треугольника: сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны. Часть (ii) есть известное свойство длины: внутренняя точка отрезка разбивает его на два отрезка, сумма длин которых равна длине исходного отрезка. ►

Теорема 5.4.1. *Любое движение есть аффинное преобразование.*

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. *Движение сохраняет коллинеарность точек и простое отношение трех коллинеарных точек.* Часть (i) леммы 5.4.1 означает, что коллинеарность (либо неколлинеарность) трех точек определяется расстояниями между ними, поэтому любое движение сохраняет коллинеарность точек. Из части (ii) леммы 5.2.1 вытекает, что простое отношение трех коллинеарных точек также полностью определяется расстояниями между ними. Действительно, простое отношение (ABC) равно отно-

шению расстояний $\frac{d_2}{d_1}$, взятому со знаками «плюс» либо «минус» в зависимости от того, лежит точка C между A и B либо нет. Следовательно, любое движение сохраняет простое отношение трех точек.

Шаг 2. Движение любую прямую взаимно однозначно отображает на некоторую прямую. Пусть f – движение плоскости E^2 или пространства E^3 ; Δ – прямая на плоскости или в пространстве; A и B – две различные точки прямой Δ . Их образы $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$ также различны. Обозначим Δ' прямую, проходящую через A' и B' , и покажем, что f отображает взаимно однозначно прямую Δ на прямую Δ' . Поскольку f сохраняет коллинеарность точек, то образом любой точки $C \in \Delta$ будет некоторая точка $C' \in \Delta'$, т. е. $f(\Delta) \subset \Delta'$. Обратно, пусть $C' \in \Delta' \setminus \{A', B'\}$. Надо показать, что найдется точка $C \in \Delta$ такая, что $f(C) = C'$. Воспользуемся следующим свойством простого отношения трех точек (см. § 5.2): если зафиксировать две точки A и B на прямой Δ , то отображение $C \mapsto \lambda$, ставящее в соответствие точке $C \in \Delta \setminus \{A, B\}$ число $\lambda = (ABC)$, в котором точка C делит отрезок AB , является взаимно однозначным соответствием между множеством точек $\Delta \setminus \{A, B\}$ и множеством чисел $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Пусть $\lambda = (A'B'C')$ – простое отношение, в котором C' делит отрезок $A'B'$. Тогда, если C – точка на прямой Δ , которая делит отрезок AB в отношении λ , то $f(C) = C'$, поскольку f сохраняет простое отношение точек.

Шаг 3. Движение плоскости $f: E^2 \rightarrow E^2$ является биективным отображением. Ранее уже отмечалось, что отображение инъективно. Осталось доказать сюръективность. Пусть Δ_1 и Δ_2 – две прямые на плоскости E^2 . По доказанному на шаге 2 их образы $f(\Delta_1) = \Delta'_1$ и $f(\Delta_2) = \Delta'_2$ – также две прямые. Пусть $M' \in E^2 \setminus (\Delta'_1 \cup \Delta'_2)$. Существует прямая Δ' , проходящая через точку M' и пересекающая прямые Δ'_1 и Δ'_2 в различных точках A' и B' . Пусть $\lambda = (A'B'M')$. Рассмотрим прямую Δ , проходящую через точки A и B , являющиеся прообразами точек A' и B' соответственно. Тогда $M' = f(M)$, где M – точка на прямой Δ такая, что $(ABM) = \lambda$. Таким образом, каждая точка плоскости имеет прообраз при отображении f , т. е. f сюръективно, а значит, и биективно.

Шаг 4. Движение пространства $f: E^3 \rightarrow E^3$ является биективным отображением. Рассуждения на шаге 3 показывают, что отображение f каждую плоскость π взаимно однозначно отображает на некоторую плоскость π' . Пусть π_1 и π_2 – две плоскости, их образы $f(\pi_1) = \pi'_1$ и $f(\pi_2) = \pi'_2$ – также две плоскости. Пусть $M' \in E^3 \setminus (\pi'_1 \cup \pi'_2)$. Существует прямая Δ' , проходящая через точку M' и пересекающая плоскости π'_1 и π'_2 в различных точках A' и B' . Пусть $\lambda = (A'B'M')$. Рассмотрим прямую Δ , проходящую через точки A и B , являющиеся прообразами точек A' и B' соответственно. Тогда $M' = f(M)$, где M – точка на прямой Δ такая, что $(ABM) = \lambda$. Таким образом, каждая точка пространства имеет прообраз при отображении f , т. е. f сюръективно, а значит, и биективно. ◀

Следствие 5.4.1. Множество $D(2)$ всех движений плоскости является подгруппой группы $\text{Aff}(2)$ аффинных преобразований плоскости E^2 . Множество $D(3)$ всех движений пространства E^3 является подгруппой группы $\text{Aff}(3)$ аффинных преобразований пространства E^3 .

Доказательство. В теореме 5.4.1 доказаны включения $D(2) \subset \text{Aff}(2)$ и $D(3) \subset \text{Aff}(3)$. Согласно критерию подгруппы, осталось проверить справедливость двух условий: композиция двух движений – движение; отображение, обратное

движению – движение. Оба условия очевидно вытекают из определения движения и того факта, что любое движение – биекция. ◀

Поскольку движение $f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$, $n=1,2$, – является аффинным преобразованием, то оно индуцирует линейный оператор $\varphi_f: \mathbf{V}(\mathbf{E}^n) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^n)$. Ранее мы отмечали (утверждение 5.2.1), что φ_f – биективный оператор, сохраняющий линейную зависимость и независимость векторов. Следующее утверждение показывает, что если φ_f индуцируется движением, то он обладает некоторыми дополнительными свойствами.

Утверждение 5.4.1. Если f – движение, то индуцированный линейный оператор φ_f сохраняет длины векторов, величины углов между ними и скалярное произведение векторов. Это означает, что для любых векторов \vec{a}, \vec{b} , выполняются условия:

$$(i) |\varphi_f(\vec{a})| = |\vec{a}|;$$

(ii) $\alpha' = \alpha$, где α – величина угла между неколлинеарными векторами \vec{a} и \vec{b} , α' – величина угла между их образами $\varphi_f(\vec{a})$ и $\varphi_f(\vec{b})$;

$$(iii) \varphi_f(\vec{a}) \cdot \varphi_f(\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Доказательство. Напомним, что оператор φ_f определяется формулой $\varphi_f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$, где A' и B' – образы точек A и B при отображении f . Поскольку f сохраняет расстояния между точками, то φ_f сохраняет длины векторов. Величина угла α между неколлинеарными векторами $\vec{a} = \overline{OA}$ и $\vec{b} = \overline{OB}$ может быть найдена по теореме косинусов, примененной к треугольнику OAB , т. е. α определяется попарными расстояниями между точками O, A, B . Следовательно, оператор φ_f сохраняет величину угла между векторами. Поскольку скалярное произведение двух векторов определяется их длинами и величиной угла между ними, то оно также сохраняется оператором φ_f . ▶

Определение 5.4.2. Линейный оператор $\varphi: \mathbf{V}(\mathbf{E}^n) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{E}^n)$, $n=2,3$, который сохраняет скалярное произведение, называется **ортогональным оператором**.

Таким образом, линейный оператор, индуцированный движением, является ортогональным оператором.

Следствие 5.4.2. Если f – движение, то для любого ортонормированного репера преобразованный репер (см. следствие 5.2.1) также является ортонормированным.

Пусть $f: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ – движение плоскости. Зафиксируем некоторый ортонормированный репер (O, \vec{i}, \vec{j}) . Как и любое аффинное преобразование, движение f может быть записано в этом репере в координатах

$$f: \begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_1, \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_2. \end{cases}$$

Здесь $(\alpha_{11}, \alpha_{21})$ и $(\alpha_{12}, \alpha_{22})$ – координаты единичных векторов соответственно $\varphi_f(\vec{i})$ и $\varphi_f(\vec{j})$ в базисе (\vec{i}, \vec{j}) , (α_1, α_2) – координаты точки $f(O) = O'$ в данном репере. Обозначим φ величину угла поворота вектора \vec{i} до вектора $\varphi_f(\vec{i})$, ψ – величину угла поворота вектора \vec{j} до вектора $\varphi_f(\vec{j})$ (рис. 5.4.1).

Тогда имеем $\varphi_f(\vec{i})(\cos \varphi, \sin \varphi)$ и $\varphi_f(\vec{j})(\cos \psi, \sin \psi)$. Если движение f сохраняет ориентацию (движение первого рода), то $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$; если f меняет ориентацию на

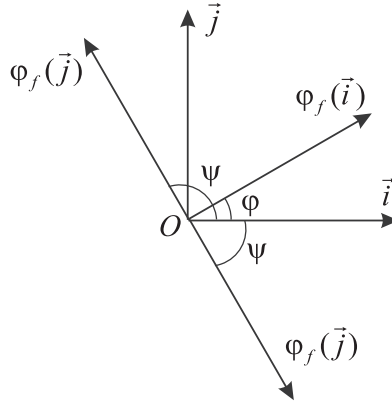


Рис. 5.4.1

противоположную (*движение второго рода*), то $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Пользуясь формулами приведения, получим координатные записи движений в ортонормированном репере:

$$f: \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + \alpha_1, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + \alpha_2 \end{cases} \quad (5.4.1)$$

движение I рода;

$$f: \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + \alpha_1, \\ y' = x \sin \varphi - y \cos \varphi + \alpha_2 \end{cases} \quad (5.4.2)$$

движение II рода.

Формулы (5.4.1) и (5.4.2) могут быть записаны единообразно:

$$f: \begin{cases} x' = x \cos \varphi - \varepsilon y \sin \varphi + \alpha_1, \\ y' = x \sin \varphi + \varepsilon y \cos \varphi + \alpha_2, \end{cases}$$

где $\varepsilon = 1$ для движений I рода и $\varepsilon = -1$ для движений II рода.

Приведем основные примеры движений плоскости.

$$1. \tau_{\vec{a}}: \begin{cases} x' = x + \alpha_1, \\ y' = y + \alpha_2 \end{cases}$$

параллельный перенос на вектор \vec{a} , имеющий координаты (α_1, α_2) в базисе (\vec{i}, \vec{j}) .

$$2. r_{\varphi}: \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

поворот плоскости на угол φ вокруг начала координат.

$$3. f: \begin{cases} x' = x + \alpha, \\ y' = -y \end{cases}$$

скользящая симметрия – симметрия относительно прямой Ox (произвольная точка $M(x, y)$ переходит в точку $\tilde{M}(x, -y)$) с последующим параллельным переносом вдоль этой прямой на вектор $\vec{a}(\alpha, 0)$ (точка $\tilde{M}(x, -y)$ переходит в точку $M'(x + \alpha, -y)$). В частности, если $\alpha = 0$, то $f = \sigma_{Ox}$ – **симметрия** относительно прямой Ox (рис. 5.4.2).

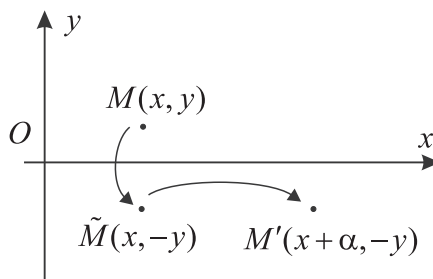


Рис. 5.4.2

Покажем, что любое движение плоскости является одним из движений, указанных в примерах.

Теорема 5.4.2. Любое движение f плоскости E^2 есть одно из следующих преобразований:

- (i) f – параллельный перенос на некоторый вектор;
- (ii) f – поворот плоскости вокруг неподвижной точки;
- (iii) f – скользящая симметрия относительно некоторой прямой.

Доказательство. Рассмотрим вначале движение f первого рода, которое задается в ортонормированном репере (O, \vec{i}, \vec{j}) формулами (5.4.1). Допустим, что f имеет неподвижную точку, т. е. такую точку M_0 , что $f(M_0) = M_0$. Рассмотрим репер (M_0, \vec{i}, \vec{j}) . Рассуждения, проведенные в начале этого пункта, показывают, что в этом репере f задается формулами

$$f: \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$

т. е. является поворотом плоскости на угол φ вокруг точки M_0 .

Пусть теперь f не имеет неподвижной точки, в таком случае система линейных уравнений

$$\begin{cases} x = x \cos \varphi - y \sin \varphi + \alpha_1, \\ y = x \sin \varphi + y \cos \varphi + \alpha_2 \end{cases}$$

относительно (x, y) не имеет решений. Следовательно, определитель матрицы этой системы равен нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} &= \\ = (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi &= 1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 2(1 - \cos \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\cos \varphi = 1$, следовательно, $\sin \varphi = 0$ и движение f задается формулами

$$\begin{cases} x' = x + \alpha_1, \\ y' = y + \alpha_2, \end{cases}$$

т. е. является параллельным переносом.

Рассмотрим теперь движение f II рода, которое задается в ортонормированном репере (O, \vec{i}, \vec{j}) формулами (5.4.2). Определим векторы

$$\vec{i}'\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right); \quad \vec{j}'\left(-\sin\frac{\varphi}{2}, \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Очевидно, что (\vec{i}', \vec{j}') – ортонормированный базис. Вычислим координаты вектора $\varphi_f(i')$ (формулы (5.3.3):

$$\varphi_f(\vec{i}')(l', m') : \begin{cases} l' = \cos\frac{\varphi}{2} \cos\varphi + \sin\frac{\varphi}{2} \sin\varphi = \cos\frac{\varphi}{2}, \\ m' = \cos\frac{\varphi}{2} \sin\varphi - \sin\frac{\varphi}{2} \cos\varphi = \sin\frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, $\varphi_f(\vec{i}') = \vec{i}'$, т. е. \vec{i}' – неподвижный вектор при отображении φ_f . Аналогично

$$\varphi_f(\vec{j}')(l', m') : \begin{cases} l' = -\sin\frac{\varphi}{2} \cos\varphi + \cos\frac{\varphi}{2} \sin\varphi = \sin\frac{\varphi}{2}, \\ m' = -\sin\frac{\varphi}{2} \sin\varphi - \cos\frac{\varphi}{2} \cos\varphi = -\cos\frac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

т. е. $\varphi_f(\vec{j}') = -\vec{j}'$.

Следовательно, координатная запись движения f в репере (O, \vec{i}', \vec{j}') имеет вид

$$f : \begin{cases} x' = x + \beta_1, \\ y' = -y + \beta_2. \end{cases}$$

Пусть точка $A\left(\frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}\right)$ задана координатами в репере (O, \vec{i}', \vec{j}') . Легко проверить, что в ортонормированном репере (A, \vec{i}', \vec{j}') движение f задается формулами

$$f : \begin{cases} x' = x + \beta_1, \\ y' = -y, \end{cases}$$

т. е. $f = \sigma_\Delta$ – скользящая симметрия относительно прямой Δ с начальной точкой A и направляющим вектором \vec{i}' . ►

Следующая теорема показывает, что в качестве элементарных движений, композиция которых дает любое движение плоскости (порождающих все движения), можно взять симметрии относительно прямых.

Теорема 5.4.3. Любое движение f плоскости E^2 есть композиция не более трех симметрий относительно прямых.

Доказательство. Используем предыдущую теорему 5.4.2.

Пусть $f = \tau_{\vec{a}}$ – параллельный перенос на вектор \vec{a} . Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то возьмем две прямые Δ_1 и Δ_2 , перпендикулярные вектору \vec{a} и находящиеся на расстоянии $\frac{|\vec{a}|}{2}$ друг от друга. Очевидно, что $\tau_{\vec{a}} = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ (рис. 5.4.3).

Если $\vec{a} = \vec{0}$, т. е. $f = \text{Id}_{E^2}$, то $\text{Id}_{E^2} = \sigma_\Delta \circ \sigma_\Delta$ для любой прямой Δ . Пусть $f = r_\varphi$ – поворот плоскости на угол величиной φ вокруг точки O . Тогда $r_\varphi = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$, где Δ_1 и Δ_2 – прямые, пересекающиеся в точке O под углом $\frac{\varphi}{2}$ (рис. 5.4.4).

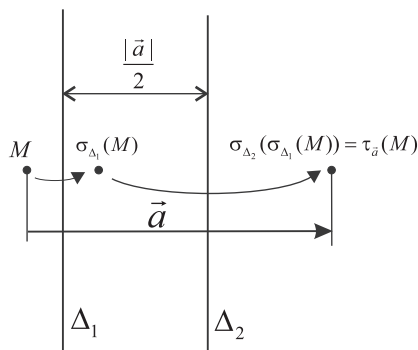


Рис. 5.4.3

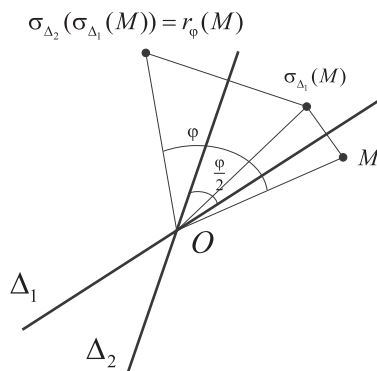


Рис. 5.4.4

Пусть f – скользящая симметрия плоскости относительно прямой Δ с вектором скольжения \vec{a} . Тогда $f = \sigma_{\Delta}$, если $\vec{a} = \vec{0}$ и $f = \tau_{\vec{a}} \circ \sigma_{\Delta} = \sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta}$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$. ►

Перейдем к движениям пространства. Пусть в пространстве E^3 фиксирован ортонормированный репер $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Приведем примеры движений, заданных в данном репере следующими формулами:

$$1. \tau_{\vec{a}} : \begin{cases} x' = x + \alpha_1, \\ y' = y + \alpha_2, \\ z' = z + \alpha_3 - \end{cases}$$

параллельный перенос пространства на вектор \vec{a} , имеющий координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$2. f : \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' = z - \end{cases}$$

поворот пространства вокруг прямой (оси Oz) на угол φ .

$$3. f : \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' = -z - \end{cases}$$

поворотная симметрия: поворот пространства вокруг прямой (оси Oz) с последующей симметрией относительно плоскости, перпендикулярной этой прямой (плоскости Oxy).

$$4. f : \begin{cases} x' = x + \alpha_1, \\ y' = y + \alpha_2, \\ z' = -z - \end{cases}$$

скользящая симметрия относительно плоскости (симметрия относительно плоскости Oxy с последующим параллельным переносом пространства вдоль этой плоскости).

$$5. f: \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' = z + \alpha - \end{cases}$$

винтовое движение (поворот вокруг оси Oz с последующим параллельным переносом вдоль этой оси).

Теорема 5.4.4. Любое движение f пространства E^3 есть преобразование одного из пяти перечисленных выше типов.

Доказательство. Выше отмечалось, что линейный оператор φ_f индуцированный движением f , сохраняет скалярное произведение, т. е. является ортогональным линейным оператором. Из теоремы, которая доказывается в алгебре (см., например, [2, теорема 24.11]), следует, что для оператора φ_f существует ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, в котором матрица φ_f имеет вид $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Это означает, что для любой точки O в репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ движение f задается формулами

$$f: \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + \alpha_1, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + \alpha_2, \\ z' = \pm z + \alpha_3. \end{cases}$$

Если $A \neq E_3$, то, подбирая подходящим образом точку O , можно добиться того, что некоторые из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ обратятся в нуль и координатная запись движения f будет одной из тех, которые приведены в примерах 1–5. Способы выбора точки O можно найти в [2, § 26.6]. ►

ГЛАВА 6

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИМЕРЫ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Начиная с этого момента слово *пространство* теряет для нас однозначный смысл, а именно тот, который вкладывался в него в школьной геометрии и на который мы опирались до сих пор, обозначая пространство символом E^3 . Теперь к слову «пространство» надо добавлять прилагательное, поскольку в курсе алгебры уже было понятие *векторное пространство*, а у нас сейчас появится термин *аффинное пространство*, далее – *евклидово, метрическое, топологическое*. Многие из них являются объектами изучения не геометрии, а иных дисциплин – математического и функционального анализа, топологии и др. Однако слово *пространство* во всех случаях подчеркивает геометрическое происхождение этих понятий и возможность использования геометрического типа мышления при их изучении.

Понятие *аффинное пространство* возникает как обобщение понятий упомянутого выше пространства E^3 , плоскости E^2 и прямой E^1 . При этом поступают обычно следующим образом: выделяются некоторые существенные свойства обобщаемых понятий, эти свойства формулируются как аксиомы, и новое понятие возникает как объект, удовлетворяющий данным аксиомам. В нашем конкретном случае мы отмечаем следующие общие свойства пространства E^3 , плоскости E^2 и прямой E^1 :

- (i) каждый из этих объектов – множество точек;
- (ii) каждая упорядоченная пара точек определяет вектор, множество которых составляет векторное пространство $V(E^n)$, $n = 1, 2, 3$;
- (iii) от любой точки единственным образом можно отложить любой вектор, получив при этом точку (конец соответствующего направленного отрезка).

Аксиоматизация этих свойств приводит к следующему определению.

Определение 6.1.1. Пусть A – непустое множество, элементы которого будут называться **точками** и обозначаться рукописными латинскими буквами $A = \{A, \dots\}$. Пусть $V = \{\vec{a}, \dots\}$ – векторное пространство над полем F . Пусть далее каждой упорядоченной паре точек (A, B) поставлен в соответствие вектор, который будем обо-

значать \overline{AB} . Множество \mathcal{A} называется **аффинным пространством, связанным с векторным пространством \mathbf{V}** , если выполняются две аксиомы:

\mathcal{A}_I . Для любой точки $A \in \mathcal{A}$ и любого вектора $\vec{a} \in \mathbf{V}$ существует единственная точка $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\overline{AB} = \vec{a}$;

\mathcal{A}_{II} . Для любых точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ верно **соотношение Шаля**

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Тот факт, что каждой упорядоченной паре точек (A, B) , $A, B \in \mathcal{A}$, ставится в соответствие вектор $\overline{AB} \in \mathbf{V}$, означает, что задано отображение

$$\Phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{V}, (A, B) \mapsto \Phi(A, B) \equiv \overline{AB}. \quad (6.1.1)$$

Аксиомы \mathcal{A}_I и \mathcal{A}_{II} описывают свойства этого отображения. Отметим, что аксиома \mathcal{A}_I означает фактически, что задано отображение

$$\Psi: \mathcal{A} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{A},$$

сопоставляющее паре (A, \vec{a}) точку B такую, что $\vec{a} = \overline{AB}$. Итак, в аффинном пространстве любой вектор можно отложить от любой точки и получить однозначно определенную точку.

Определение 6.1.2. *Размерностью аффинного пространства, связанного с конечномерным векторным пространством \mathbf{V} , называется размерность пространства \mathbf{V} ; n -мерное аффинное пространство обозначается \mathcal{A}^n . Если \mathbf{V} бесконечномерно, то аффинное пространство \mathcal{A} также называется **бесконечномерным**. Нульмерное аффинное пространство \mathcal{A}^0 называется **аффинной точкой**, одномерное аффинное пространство \mathcal{A}^1 называется **аффинной прямой**.*

Замечание 6.1.1. Обозначение \overline{AB} для вектора $\Phi(A, B)$, по виду совпадающее с обозначением класса эквивалентных отрезков, есть на самом деле лишь условность, позволяющая подчеркнуть близость этих понятий в определенном контексте (но не их совпадение). Ниже будет показано, что для любого векторного пространства существует аффинное пространство, связанное с ним. Поэтому векторы, определяемые парами точек аффинного пространства, могут иметь различную природу, они могут являться числами, многочленами, функциями, матрицами и т. д.

Приведем некоторые следствия, непосредственно вытекающие из определения аффинного пространства.

Утверждение 6.1.1. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$. В таком случае $\overline{AB} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Доказательство. Полагая $A = B = C$, из соотношения Шаля получаем $\overline{AA} + \overline{AA} = \overline{AA}$, откуда $\overline{AA} = \vec{0}$. Из доказанного вытекает, что $\Psi(A, \vec{0}) = A$, т. е. откладывая от точки A нулевой вектор, получаем исходную точку A . Если теперь для точек A, B верно равенство $\overline{AB} = \vec{0}$, т. е. $\Psi(A, \vec{0}) = B$, то в силу однозначности откладывания вектора от точки получаем $A = B$. ◀

Утверждение 6.1.2. Для любых точек $A, B \in \mathcal{A}$ верно равенство $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Доказательство. $\overline{AB} + \overline{BA} = \vec{0}$ ввиду соотношения Шаля и утверждения 6.1.1. Следовательно, $\overline{AB} = -\overline{BA}$. ▶

В отображении Φ зафиксируем первый аргумент, положив $A = O$. Получим отображение

$$\Phi_O : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{V}, M \mapsto \overline{OM}. \quad (6.1.2)$$

Вектор \overline{OM} называется **радиус-вектором** точки M .

Утверждение 6.1.3. Для любой точки $O \in \mathcal{A}$ отображение (6.1.2), ставящее в соответствие каждой точке ее радиус-вектор, является биекцией между множеством всех точек аффинного пространства \mathcal{A} и множеством всех векторов векторного пространства \mathbf{V} .

Доказательство. Пусть $\vec{a} \in \mathbf{V}$, тогда для $M = \Psi(O, \vec{a})$ имеем $\overline{OM} = \vec{a}$, следовательно, отображение Φ_O сюръективно. Если $\Phi_O(A) = \Phi_O(B)$, т. е. $\overline{OA} = \overline{OB}$, то, применяя соотношение Шаля, получаем $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$, т. е. $\overline{AB} = \vec{0}$. Утверждение 6.1.1 теперь влечет, что $A = B$, т. е. Φ_O инъективно. ◀

Таким образом, отображение Φ_O отождествляет точки с векторами, поэтому Φ_O будем называть **векторизацией** аффинного пространства \mathcal{A} .

Примеры аффинных пространств

1. Прежде всего, примерами аффинных пространств служат пространство \mathbf{E}^3 , плоскость \mathbf{E}^2 и прямая \mathbf{E}^1 , поскольку именно их свойства аксиоматизировались в определении 6.1.1. Эти аффинные пространства связаны с векторными пространствами $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$, $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$, $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$ соответственно. Отображение Φ здесь возникает, если для каждой упорядоченной пары точек (A, B) построить вначале направленный отрезок \overline{AB} , а затем класс эквивалентности этого отрезка, т. е. вектор \overline{AB} .

2. Пусть $\{A\}$ – одноэлементное множество, $\mathbf{V} = \{\vec{0}\}$ – нулевое векторное пространство над полем \mathbf{F} . Зададим отображение Φ следующим (единственно возможным) образом:

$$\Phi(A, A) = \vec{0}.$$

Очевидно, выполняются аксиомы \mathcal{A}_I и \mathcal{A}_{II} . Следовательно, любое одноэлементное множество может рассматриваться как нульмерное аффинное пространство (аффинная точка), связанное с нулевым векторным пространством над произвольным полем \mathbf{F} .

Покажем теперь, что для любого векторного пространства существует аффинное пространство, связанное с ним, в частности, существуют аффинные пространства любой размерности, а также бесконечномерные аффинные пространства.

3. Пусть \mathbf{V} – произвольное векторное пространство над полем \mathbf{F} . Положим $\mathcal{A} = \mathbf{V}$, т. е. будем рассматривать каждый элемент множества \mathbf{V} и как вектор, и как точку. Рассмотрим следующее отображение:

$$\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{V}, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{b} - \vec{a}.$$

Упражнение 6.1.1. Проверьте, что выполняются аксиомы \mathcal{A}_I и \mathcal{A}_{II} .

Таким образом, любое векторное пространство может рассматриваться как аффинное пространство, связанное с самим собой.

В частности, если в качестве векторного пространства \mathbf{V} взять векторное пространство строк $\mathbf{F}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbf{F}\}$, то множество \mathbf{F}^n можно рассматривать как аффинное пространство, связанное с векторным пространством \mathbf{F}^n . В этом случае \mathbf{F}^n называется *n-мерным арифметическим аффинным пространством*.

ством над полем \mathbf{F} . В этом примере вектор \overrightarrow{AB} , построенный по паре точек $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ имеет вид $\overrightarrow{AB} = (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$.

§ 6.2. ПОДПРОСТРАНСТВА (ПЛОСКОСТИ) В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

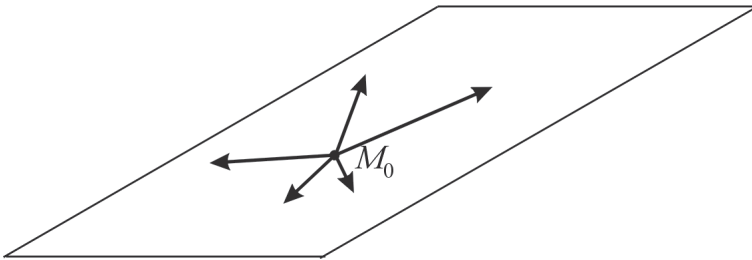
Определим важное понятие подпространства аффинного пространства, обобщающее понятия прямых и плоскостей в пространстве \mathbf{E}^3 .

Определение 6.2.1. Пусть \mathcal{A} – аффинное пространство, связанное с векторным пространством \mathbf{V} ; M_0 – некоторая точка пространства \mathcal{A} ; \mathbf{W} – подпространство векторного пространства \mathbf{V} . **Подпространством** аффинного пространства \mathcal{A} называется множество

$$\mathcal{B} = \{M \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{W}\}. \quad (6.2.1)$$

Для подпространства \mathcal{B} точка M_0 называется **начальной точкой**, а \mathbf{W} – **направляющим пространством**.

Итак, подпространство аффинного пространства состоит из всех точек, получающихся откладыванием от фиксированной точки M_0 всевозможных векторов некоторого подпространства \mathbf{W} векторного пространства \mathbf{V} , как показано на рисунке.



Подпространство \mathcal{B} аффинного пространства \mathcal{A} , определяемое формулой (6.2.1), т. е. подпространство с начальной точкой $M_0 \in \mathcal{A}$ и направляющим пространством $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$, будем обозначать $M_0 + \mathbf{W}$.

Отметим некоторые свойства подпространства аффинного пространства.

1. Подпространство $M_0 + \mathbf{W}$ содержит точку M_0 , так как $\overrightarrow{M_0M_0} = \vec{0} \in \mathbf{W}$.
2. Для любых точек $A, B \in \mathcal{B}$ вектор \overrightarrow{AB} принадлежит подпространству \mathbf{W} : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{M_0B} = -\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B} \in \mathbf{W}$. Это означает, что ограничение отображения Φ на $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ принимает значения в подпространстве \mathbf{W} .
3. Пусть $A \in \mathcal{B}$, $\vec{a} \in \mathbf{W}$. Отложим вектор \vec{a} от точки A , т. е. рассмотрим точку $B \in \mathcal{A}$ такую, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Убедимся, что $B \in \mathcal{B}$. Действительно, $\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0A} + \vec{a} \in \mathbf{W}$. Это означает, что ограничение отображения Ψ на $\mathcal{B} \times \mathbf{W}$ принимает значения в \mathcal{B} .

Если к перечисленным свойствам добавить замечание о том, что для точек подпространства \mathcal{B} выполняется соотношение Шаля, то можно сделать вывод о том, что верно следующее утверждение.

Утверждение 6.2.1. Подпространство $B = M_0 + \mathbf{W}$ аффинного пространства A является аффинным пространством, связанным с векторным пространством \mathbf{W} , при ограничении на $B \times B$ отображения Φ .

Отметим, что если $\mathbf{W} = \{\vec{0}\}$, то $B = \{M_0\}$ – точка в A ; если $\dim \mathbf{W} = 1$, то B – аффинная прямая в A ; если $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ то $B = A$.

Примерами подпространств в E^3 как в аффинном пространстве служат прямые и плоскости. Действительно, если Δ – прямая в E^3 с начальной точкой M_0 и направляющим вектором \vec{a} , то Δ состоит из всех точек $M \in E^3$, таких, что $\overline{M_0 M} = t\vec{a}$, $t \in \mathbf{R}$. Это означает, что $\Delta = M_0 + \mathbf{W}^1$, где $\mathbf{W}^1 = L(\vec{a})$ – одномерное подпространство $\mathbf{V}(E^3)$, порожденное вектором \vec{a} . Точно так же плоскость π в E^3 можно определить как подпространство $\pi = M_0 + \mathbf{W}^2$, где M_0 – начальная точка плоскости π ; $\mathbf{W}^2 = \mathbf{V}(\pi)$ – двумерное подпространство пространства $\mathbf{V}(E^3)$, состоящее из всех векторов плоскости π .

Учитывая сказанное выше, подпространства аффинного пространства принято называть также *плоскостями*. Подпространство $B = M_0 + \mathbf{W}$, которое задается формулой (6.2.1), называется *плоскостью* в аффинном пространстве A с *начальной точкой* M_0 и *направляющим пространством* \mathbf{W} . Если $\dim \mathbf{W} = k$, то B называется *k-мерной плоскостью* в аффинном пространстве A . В дальнейшем мы будем придерживаться этой терминологии, носящей более геометрический характер. В n -мерном аффинном пространстве A^n существуют плоскости любой размерности k , $0 \leq k \leq n$. Это следует из того, что в связанном с A^n n -мерном векторном пространстве \mathbf{V}^n существуют подпространства соответствующих размерностей.

Важную роль в аффинном пространстве играют *гиперплоскости*.

Определение 6.2.2. Пусть A – аффинное пространство, связанное с векторным пространством \mathbf{V} . Плоскость $B = M_0 + \mathbf{W}$ в пространстве A называется *гиперплоскостью*, если ее направляющее пространство \mathbf{W} имеет коразмерность 1 в пространстве \mathbf{V} .

В частности, гиперплоскость в n -мерном аффинном пространстве – это $(n-1)$ -мерная плоскость.

Следующее утверждение показывает, что в качестве начальной точки плоскости в аффинном пространстве можно брать любую точку этой плоскости, сохраняя направляющее пространство.

Утверждение 6.2.2. Пусть $B = M_0 + \mathbf{W}$ – плоскость в аффинном пространстве A . Тогда плоскость $M + \mathbf{W}$ совпадает с B для любой точки $M \in B$.

Доказательство. Пусть $A \in B$. Тогда $\overline{MA} = \overline{MM_0} + \overline{M_0A} = -\overline{M_0M} + \overline{M_0A} \in \mathbf{W}$, т. е. $A \in M + \mathbf{W}$. Обратно, пусть $A \in M + \mathbf{W}$. Тогда $\overline{M_0A} = \overline{M_0M} + \overline{MA} \in \mathbf{W}$, т. е. $A \in B$. ►

Утверждение 6.2.3. Пусть $(B_i)_{i \in I}$ – семейство плоскостей в аффинном пространстве A и \mathbf{W}_i – направляющее пространство плоскости B_i для любого $i \in I$. Тогда либо $\bigcap_{i \in I} B_i = \emptyset$, либо $B = \bigcap_{i \in I} B_i$ – плоскость в пространстве A с направляющим пространством $\mathbf{W} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$.

Доказательство. Пусть $B = \bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ и $M_0 \in B$. Тогда верны следующие эквивалентности:

$$(M \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \ M \in \mathcal{B}_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \ \overline{M_0 M} \in \mathbf{W}_i) \Leftrightarrow (\overline{M_0 M} \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i).$$

Сравнивая начало и конец в цепочке эквивалентностей, получим, что \mathcal{B} является плоскостью в \mathcal{A} с начальной точкой M_0 и направляющим пространством $\mathbf{W} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$. ►

Укажем необходимые и достаточные условия для того, чтобы две плоскости имели непустое пересечение.

Утверждение 6.2.4. Пусть $\mathcal{B} = M_0 + \mathbf{W}$ и $\mathcal{P} = N_0 + \mathbf{U}$ – плоскости в аффинном пространстве \mathcal{A} .

(i) Если $\mathcal{B} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, то для любых точек $M \in \mathcal{B}$ и $N \in \mathcal{P}$ верно $\overline{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$.

(ii) Если существуют точки $M \in \mathcal{B}$ и $N \in \mathcal{P}$ такие, что $\overline{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$, то $\mathcal{B} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$.

Полезна словесная формулировка этого утверждения:

две плоскости аффинного пространства пересекаются (т. е. их пересечение не пусто) тогда и только тогда, когда **вектор-мостик** (вектор, «соединяющий» точки плоскостей) принадлежит сумме направляющих пространств этих плоскостей.

Доказательство. (i) Пусть $P \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}$. Тогда $\overline{MP} \in \mathbf{W}$, $\overline{PN} \in \mathbf{U}$. Следовательно, $\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$.

(ii) Пусть $\overline{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$. Это означает, что $\overline{MN} = \vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} \in \mathbf{W}$, $\vec{b} \in \mathbf{U}$. Выберем точки $P_1 = M + \vec{a} \in \mathcal{B}$ и $P_2 = N - \vec{b} \in \mathcal{P}$. Тогда $\overline{P_1 P_2} = \overline{P_1 M} + \overline{MN} + \overline{NP_2} = -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \vec{0}$, т. е. $P_1 = P_2$. Таким образом, плоскости \mathcal{B} и \mathcal{P} имеют непустое пересечение. ►

В аффинном пространстве можно определить аналог линейной оболочки подмножества векторов векторного пространства.

Определение 6.2.3. Пусть S – непустое подмножество аффинного пространства \mathcal{A} . **Аффинной оболочкой** $\text{Aff}(S)$ множества S называется наименьшая по включению плоскость в \mathcal{A} , содержащая S .

Термин *наименьшая по включению* означает, что $\text{Aff}(S)$ содержится в каждой плоскости, включающей в себя множество S . Аффинная оболочка существует для любого непустого подмножества S . Действительно, семейство $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$, $S \subset \mathcal{B}_i \ \forall i \in I$, всех плоскостей в \mathcal{A} , содержащих S , не пусто, поскольку все аффинное пространство \mathcal{A} содержит S , т. е. является одной из таких плоскостей. Рассмотрим пересечение этого семейства $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$. Поскольку множество S содержится в каждой плоскости \mathcal{B}_i , то $S \subset \mathcal{B}$ и, следовательно, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Согласно утверждению 6.2.2, $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ –

плоскость в \mathcal{A} , содержащая множество S . Кроме того, по построению, плоскость \mathcal{B} есть в каждой плоскости, содержащей S , т. е. является наименьшей из таких плоскостей. Таким образом, $\mathcal{B} = \text{Aff}(S)$.

Рассмотрим подробнее аффинную оболочку конечного множества точек, содержащего $k+1$ точку $S = \{M_0, \dots, M_k\}$, $k \in \{0, 1, \dots\}$. Пусть \mathcal{B} – плоскость с начальной точкой M_0 и направляющим подпространством $L(\overline{M_0 M_1}, \dots, \overline{M_0 M_k})$, являющимся линейной оболочкой векторов $\overline{M_0 M_1}, \dots, \overline{M_0 M_k}$. Плоскости \mathcal{B} , очевидно, принадлежат все точки M_0, \dots, M_k , а сама она содержится в любой плоскости, содержащей точки M_0, \dots, M_k . Следовательно, $\mathcal{B} = \text{Aff}(S)$, в частности, направля-

ющее пространство аффинной оболочки $\text{Aff}(M_0, \dots, M_k)$ совпадает с линейной оболочкой $L(\overline{M_0M_1}, \dots, \overline{M_0M_k})$. Отсюда вытекает, что $\dim \text{Aff}(M_0, \dots, M_k) \leq k$. При максимально возможном значении этой размерности, т. е. в случае, когда векторы $\overline{M_0M_1}, \dots, \overline{M_0M_k}$ линейно независимы, используют следующую терминологию.

Определение 6.2.4. Точки M_0, \dots, M_k аффинного пространства A называются **аффинно независимыми** (или **точками общего положения**), если $\dim \text{Aff}(M_0, \dots, M_k) = k$.

Приведем несколько простых утверждений об аффинной независимости точек.

1. Если $S = \{M_0, \dots, M_k\}$ – аффинно независимое множество точек, то любое непустое подмножество S аффинно независимо.

2. Две (различные) точки M_0, M_1 аффинно независимы.

3. Три точки M_0, M_1, M_2 аффинно независимы тогда и только тогда, когда они не лежат на одной прямой. Четыре точки M_0, M_1, M_2, M_3 аффинно независимы тогда и только тогда, когда они не лежат в одной двумерной плоскости и т. д.

4. В любой k -мерной плоскости существуют $k+1$ аффинно независимых точек, в частности, в пространстве A^n существуют $n+1$ аффинно независимых точек.

Упражнение 6.2.1. Докажите утверждения 1–4.

Если B и P – плоскости в аффинном пространстве, то, как легко видеть, их объединение $B \cup P$ в общем случае не является плоскостью. Например, объединение двух различных прямых в пространстве E^3 не является ни прямой, ни плоскостью и не совпадает со всем пространством. Эта ситуация такая же, как для подпространств W, U векторного пространства V . В линейной алгебре объединение $W \cup U$ заменяется операцией суммы подпространств $W + U$, в результате которой получают наименьшее по включению подпространство, содержащее W и U . Точно так же поступают в геометрии.

Определение 6.2.5. Пусть B и P – плоскости в аффинном пространстве A . Суммой плоскости B и плоскости P называется плоскость $B + P$, являющаяся аффинной оболочкой объединения $B \cup P$:

$$B + P = \text{Aff}(B \cup P).$$

Итак, сумма плоскостей $B + P$ – это наименьшая по включению плоскость, содержащая обе плоскости B и P . Поскольку $B \cup P \subset B + P$, то в качестве начальной точки плоскости $B + P$ можно брать любую точку одной из плоскостей, B или P . Что касается направляющего пространства плоскости $B + P$, то оно описывается в следующем утверждении.

Утверждение 6.2.5. Пусть B и P – плоскости в аффинном пространстве A с направляющими пространствами соответственно W и U ; T – направляющее пространство суммы $B + P$.

(i) Если $B \cap P \neq \emptyset$, то $T = W + U$.

(ii) Если $B \cap P = \emptyset$, то $T = W + U + L(\overline{MN})$, где M и N – произвольные точки соответственно плоскостей B и P .

Доказательство. (i) Пусть $P_0 \in B \cap P$. Направляющее пространство плоскости $B + P$, т. е. плоскости $\text{Aff}(B \cup P)$ можно получить, если зафиксировать точку $P_0 \in B \cap P$ и рассмотреть линейную оболочку множества векторов $\overline{M_0M}$, $M \in B \cup P$. Выше это было показано для аффинной оболочки конечного множества точек, рас-

суждения в общем случае аналогичны. Таким образом, каждый вектор \vec{c} пространства \mathbf{T} представляется в виде

$$\vec{c} = \alpha_1 \overline{P_0 M_1} + \alpha_2 \overline{P_0 M_2} + \dots + \alpha_n \overline{P_0 M_n}, \quad n \in \mathbf{N}, \alpha_i \in \mathbf{F}, M_i \in \mathcal{B} \cup \mathcal{P}.$$

Если точка M_i принадлежит плоскости \mathcal{B} , то $\overline{P_0 M_i} \in \mathbf{W}$, если же $M_i \in \mathcal{P}$, то $\overline{P_0 M_i} \in \mathbf{U}$. Следовательно, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, где \vec{a} и \vec{b} – произвольные векторы соответственно \mathbf{W} и \mathbf{U} . Итак, в случае (i) $\mathbf{T} = \mathbf{W} + \mathbf{U}$.

(ii) Выберем любые точки $M \in \mathcal{B}$ и $N \in \mathcal{P}$. Пространство \mathbf{T} совпадает с линейной оболочкой семейства векторов вида \overline{MP} , где $P \in \mathcal{B} \cup \mathcal{P}$. Если $P \in \mathcal{B}$, то $\overline{MP} \in \mathbf{W}$. Если же $P \in \mathcal{P}$, то $\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$, где $\overline{NP} \in \mathbf{U}$. Таким образом, каждый вектор \vec{c} пространства \mathbf{T} представляется в виде $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \alpha \overline{MN}$, где \vec{a} и \vec{b} – произвольные векторы \mathbf{W} и \mathbf{U} соответственно, а α – произвольный элемент поля \mathbf{F} . Это означает, что $\mathbf{T} = \mathbf{W} + \mathbf{U} + L(\overline{MN})$. ►

Следствие 6.2.1. Пусть $\mathcal{B} = M + \mathbf{W}$ и $\mathcal{P} = N + \mathbf{U}$ – конечномерные плоскости в аффинном пространстве \mathcal{A} ; $k = \dim \mathcal{B}$, $m = \dim \mathcal{P}$, $d = \dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{U})$.

Тогда плоскость $\mathcal{B} + \mathcal{P}$ также конечномерна, и ее размерность $s = \dim(\mathcal{B} + \mathcal{P})$ вычисляется следующим образом:

- (i) если $\mathcal{B} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, то $s = k + m - d$;
- (ii) если $\mathcal{B} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, то $s = k + m - d + 1$.

Доказательство. Поскольку размерности плоскостей определяются как размерности их направляющих пространств, то формулы (i) и (ii) вытекают из соответствующих формул линейной алгебры с учетом доказанного выше утверждения 6.2.5. В случае (i) работает формула

$$\dim(\mathbf{W} + \mathbf{U}) = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{U}).$$

В случае (ii) принимаем в расчет то, что $\overline{MN} \notin \mathbf{W} + \mathbf{U}$, следовательно,

$$\mathbf{W} + \mathbf{U} + L(\overline{MN}) = (\mathbf{W} + \mathbf{U}) \oplus L(\overline{MN}). \quad \blacktriangleright$$

Определение 6.2.6. Пусть \mathcal{B} и \mathcal{P} – плоскости в аффинном пространстве \mathcal{A} ; k, m, s, d , ($k \leq m$) – числа, определенные в формулировке следствия 6.2.1. Упорядоченная четверка чисел (k, m, s, d) называется **характеристикой** пары плоскостей $(\mathcal{B}, \mathcal{P})$.

Пусть $\mathcal{B} = M_0 + \mathbf{W}$ и $\mathcal{P} = N_0 + \mathbf{U}$ – плоскости в аффинном пространстве \mathcal{B} . Проанализируем их возможное взаимное расположение. Будем различать несколько случаев, принимая в расчет пересечение $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}$ самих плоскостей и пересечение $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$ их направляющих пространств. Отметим, прежде всего, что если плоскости пересекаются, т. е. $\mathcal{B} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, то, как следует из утверждения 6.2.3, их пересечение есть плоскость с направляющим пространством $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$.

Пусть плоскости не пересекаются, т. е. $\mathcal{B} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Рассмотрим пересечение их направляющих пространств $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$, которое всегда не пусто.

Если пересечение направляющих пространств максимально возможное, т. е. $\mathbf{W} \cap \mathbf{U} = \mathbf{W}$ или $\mathbf{W} \cap \mathbf{U} = \mathbf{U}$ (что эквивалентно условиям $\mathbf{W} \subset \mathbf{U}$ или $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}$ соответственно), то будем говорить, что плоскости \mathcal{B} и \mathcal{P} **параллельны**. Можно, для наглядности, по аналогии с пространством \mathbf{E}^3 считать, что ненулевой вектор направляющего пространства задает в плоскости **направление** (см. [9, § 9]). Тогда плоскости параллельны, если они не пересекаются, но все направления одной плоскости являются направлениями другой плоскости.

Если пересечение направляющих пространств минимально, т. е. $\mathbf{W} \cap \mathbf{U} = \{\vec{0}\}$ (у плоскостей \mathcal{B} и \mathcal{P} нет общих направлений), то будем говорить, что плоскости \mathcal{B} и \mathcal{P} **скрещиваются**.

Возможная альтернатива для двух описанных выше ситуаций следующая: для направляющих пространств выполняются условия

$$\mathbf{W} \cap \mathbf{U} \neq \{\vec{0}\}, \mathbf{W} \cap \mathbf{U} \neq \mathbf{W}, \mathbf{W} \cap \mathbf{U} \neq \mathbf{U}$$

(у непересекающихся плоскостей \mathcal{B} и \mathcal{P} есть общие направления, но множество таких направлений не совпадает с множеством направлений ни одной из плоскостей). В таком случае будем говорить, что плоскости \mathcal{B} и \mathcal{P} **частично параллельны**.

Отметим, что по характеристике (k, m, s, d) пары \mathcal{B} и \mathcal{P} конечномерных плоскостей определяют размерности плоскостей (k и m), а также тип их взаимного расположения:

- плоскости пересекаются, если $s = k + m - d$, и не пересекаются, если $s = k + m - d + 1$;
- плоскости параллельны, если $d = k$ и $s = m + 1$;
- плоскости частично параллельны, если $0 < d < k$ и $s = k + m - d + 1$;
- плоскости скрещиваются, если $d = 0$ и $s = k + m + 1$.

Упражнение 6.2.2. Докажите, что существует шесть различных вариантов (с различными характеристиками) взаимного расположения пары двумерных плоскостей и что все они реализуются в пятимерном аффинном пространстве. Выпишите характеристики пар плоскостей в каждом из шести случаев.

§ 6.3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ \mathcal{A}^n . ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Пусть \mathcal{A}^n – n -мерное аффинное пространство, связанное с векторным пространством \mathbf{V}^n над полем \mathbf{F} .

Определение 6.3.1. *Аффинным репером (или аффинной системой координат) в n -мерном аффинном пространстве \mathcal{A}^n называется упорядоченный набор $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, состоящий из фиксированной точки O пространства \mathcal{A}^n и базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ векторного пространства \mathbf{V}^n . Координатами точки $M \in \mathcal{A}^n$ в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ называются координаты ее радиус-вектора \overrightarrow{OM} в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$*

Таким образом, координаты точки $M \in \mathcal{A}^n$ в данном репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – это упорядоченный набор (x_1, \dots, x_n) элементов поля \mathbf{F} такой, что

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Если точка M имеет координаты (x_1, \dots, x_n) , то используют запись $M(x_1, \dots, x_n)$.

Введение аффинных координат имеет целью, как и любая координатизация, установление взаимно однозначного соответствия между пространством \mathcal{A}^n и некоторым другим множеством, более удобным для обращения. В данном случае, сопоставляя каждой точке пространства \mathcal{A}^n набор ее координат

$$M(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – аффинный репер в аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Если из множества базисных векторов $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ выбрать k -элементное подмножество $\{\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k}\}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, то можно определить k -мерную плоскость в пространстве \mathcal{A}^n с начальной точкой O и направляющим пространством $\mathbf{W} = L(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$. Такая плоскость называется **k -мерной координатной плоскостью**, определяемой репером $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Очевидно, что для данного $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ число k -мерных координатных плоскостей равно C_n^k . В их числе одна нульмерная координатная плоскость – это **начальная точка** O репера, **n координатных прямых** $\Delta_i = O + L(\vec{e}_i)$ и **n координатных гиперплоскостей**:

Для изучения плоскостей в аффинном пространстве \mathcal{A}^n , а также других фигур используются их *уравнения*, которые зависят от системы координат. Для нахождения наиболее простого уравнения фигуры часто необходимо переходить от одной системы координат к другой. Выясним, как связаны между собой координаты точек при таком переходе.

1) координаты $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ точки O' в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, т. е. координаты нового начала координат в старом репере;

[illegible]
$$(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad (x') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad (\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} -$$

- точки M в старом репере, или (что то же самое) вектора \overline{OM} в базисе $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$;

- точки M в новом репере, или (что то же самое) вектора $\overline{O'M}$ в базисе $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$;
- точки O' в старом репере, или (что то же самое) координатный столбец вектора $\overline{OO'}$ в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Из координат векторов нового базиса в старом базисе составим матрицу, расположив координаты вектора \vec{e}'_j в j -й столбец:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица S называется **матрицей перехода** от базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к базису $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$. Известно [7], что $\det S \neq 0$, т. е. матрица S невырожденная, и поэтому для нее существует обратная матрица S^{-1} . Пусть далее

$$[\vec{e}] = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \text{ и } [\vec{e}'] = (\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n) -$$

матрицы-строки базисных векторов. Формулы (6.3.1), определяющие матрицу перехода, можно записать в матричном виде:

$$[\vec{e}'] = [\vec{e}]S.$$

Если последнее равенство умножить справа на S^{-1} , получим

$$[\vec{e}] = [\vec{e}']S^{-1}.$$

Это означает, что S^{-1} – матрица обратного перехода от базиса $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ к базису $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Используя операцию умножения матриц, разложение векторов по базисам можно записать в матричном виде¹:

$$\overline{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = [\vec{e}](x), \quad \overline{O'M} = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + \dots + x'_n \vec{e}'_n = [\vec{e}'](x'),$$

$$\overline{OO'} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = [\vec{e}](\alpha).$$

Теперь используем соотношение Шаля для трех точек O, O' и M :

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \tag{6.3.2}$$

и подставляем в (6.3.2) выражения каждого из трех векторов через базисные векторы $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$:

$$\begin{aligned} [\vec{e}](x) &= [\vec{e}](\alpha) + [\vec{e}'](x') = [\vec{e}](\alpha) + ([\vec{e}]S)(x') = \\ &= [\vec{e}](\alpha + S(x')) = [\vec{e}](S(x') + (\alpha)). \end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец последней записи, получим

$$[\vec{e}](x) = [\vec{e}](S(x') + (\alpha)),$$

¹ Считаем, что для любых $\vec{a} \in \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathbf{F}$ запись $\vec{a}\lambda$ обозначает то же самое, что $\lambda\vec{a}$.

т. е. имеем два разных выражения для координатного столбца одного и того же вектора. Учитывая то, что координаты вектора в базисе $[\vec{e}]$ определяются однозначно, получим

$$(x) = S(x') + (\alpha). \quad (6.3.3)$$

Матричное равенство (6.3.3) перепишем поэлементно:

[illegible]

Формулы (6.3.3) или (6.3.4) называются **формулами преобразования координат** точек (матричными и координатными соответственно). Они выражают старые координаты произвольной точки аффинного пространства \mathcal{A}^n через ее новые координаты при переходе от одного аффинного репера к другому.

Отметим основные свойства формул преобразования координат. Во-первых, они задаются линейными функциями. И, во-вторых, допускают обращение, т. е. из равенств (6.3.3) или (6.3.4) можно выразить новые координаты точек через старые. Действительно, умножив равенство (6.3.3) слева на матрицу S^{-1} , обратную для S , получим

$$S^{-1}(x) = S^{-1}(S(x')) + S^{-1}(\alpha) = (S^{-1}S)(x') + S^{-1}(\alpha) = (x') + S^{-1}(\alpha),$$

откуда

$$(x') = S^{-1}(x) - S^{-1}(\alpha). \quad (6.3.5)$$

В развернутом виде формулы (6.3.5) имеют такой же вид, как равенства (6.3.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n + \beta_1, \\ x'_2 = t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n + \beta_2, \\ \\ x'_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \dots + t_{nn}x_n + \beta_n. \end{array} \right. \quad (6.3.6)$$

Здесь

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрица перехода от базиса $(\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n)$ к базису $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$, а

$$(\beta) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} = -S^{-1}(\alpha) -$$

координатный столбец точки O в репере $(O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$.

§ 6.4. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ \mathcal{A}^n

Как отмечалось выше, сопоставление

$$M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

каждой точке аффинного пространства \mathcal{A}^n ее координат в данном репере устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством \mathcal{A}^n и декартовой степенью поля $\mathbf{F}^n = \underbrace{\mathbf{F} \times \dots \times \mathbf{F}}_{\text{n раз}}$. Это позволяет говорить в привычном смысле (см. § 2.2)

об уравнениях фигур в пространстве \mathcal{A}^n .

Определение 6.4.1. Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – аффинный репер в пространстве \mathcal{A}^n , Φ – фигура (подмножество) пространства \mathcal{A}^n ,

$$F: \mathbf{F}^n \rightarrow \mathbf{F}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x_1, \dots, x_n) -$$

функция, заданная на множестве \mathbf{F}^n . Уравнение

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{6.4.1}$$

называется **уравнением фигуры Φ в данном репере**, если множество его решений совпадает с множеством $\tilde{\Phi}$ координат точек фигуры Φ .

Другими словами, уравнение (6.4.1) является уравнением фигуры Φ в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, если эта фигура может быть задана следующим образом:

$$\Phi = \{M(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathcal{A}^n \mid F(x_1^0, \dots, x_n^0) \equiv 0\}.$$

Если Φ имеет уравнение (6.4.1), то говорят также, что фигура Φ **задана** этим уравнением. Разумеется, функция F может быть определена не на всем множестве \mathbf{F}^n , а на некотором его подмножестве.

Любую фигуру $\Phi \subset \mathcal{A}^n$ можно задать уравнением (6.4.1), взяв, например, в качестве функции F характеристическую функцию $\chi_{\tilde{\Phi}}$ подмножества $\tilde{\Phi} \subset \mathbf{F}^n$ координат точек фигуры Φ . Напомним, что характеристическая функция $\chi_{\tilde{\Phi}}$ принимает значение 0 на всех элементах подмножества $\tilde{\Phi}$ и значение 1 на всех элементах дополнения $\mathbf{F}^n \setminus \tilde{\Phi}$. Понятно, что в общем случае может быть много функций F на множестве \mathbf{F}^n , равных 0 на подмножестве $\tilde{\Phi}$ и не равных 0 на дополнении $\mathbf{F}^n \setminus \tilde{\Phi}$, поэтому одна и та же фигура имеет много различных уравнений. В аналитической геометрии чаще всего встречаются фигуры, которые задаются алгебраическими уравнениями степени 1 или 2. Такие фигуры называются фигурами *первого и второго порядков* соответственно.

Определение 6.4.2. Уравнением первой степени (линейным уравнением) с n неизвестными называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_0 = 0, \tag{6.4.2}$$

где a_1, \dots, a_n, a_0 – фиксированные элементы поля \mathbf{F} (коэффициенты уравнения), причем хотя бы один из старших коэффициентов a_1, \dots, a_n отличен от нуля.

Уравнением второй степени (квадратным уравнением) с n неизвестными называется уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n a_k x_k + a_0 = 0, \quad (6.4.3)$$

где a_{ij}, a_k, a_0 – фиксированные элементы поля \mathbf{F} (коэффициенты уравнения), причем хотя бы один из старших коэффициентов a_{ij} отличен от нуля и $a_{ij} = a_{ji}$ для $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Отметим важное свойство инвариантности уравнений, которыми задаются фигуры первого и второго порядков, при переходе от одного аффинного репера к другому.

Теорема 6.4.1. (i) Если фигура Φ в репере $(O, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ имеет уравнение вида (6.4.2), то в любом другом аффинном репере фигура Φ имеет уравнение вида (6.4.2).

(ii) Если фигура Φ в репере $(O, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ имеет уравнение вида (6.4.3), то в любом другом аффинном репере фигура Φ имеет уравнение вида (6.4.3).

Кроме того, в обоих случаях сохраняется условие существования ненулевого старшего коэффициента.

Доказательство. Вначале отметим, что, зная уравнение (6.4.1) фигуры Φ в репере $(O, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, можно получить уравнение этой же фигуры в репере $(O', \bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$, если подставить в (6.4.1) вместо каждого x_i его выражение из формул (6.3.4):

$$F(s_{11}x'_1 + s_{12}x'_2 + \dots + s_{1n}x'_n + \alpha_1, \dots, s_{n1}x'_1 + s_{n2}x'_2 + \dots + s_{nn}x'_n + \alpha_n) = 0.$$

Чтобы проделать эту подстановку для уравнений вида (6.4.2) и (6.4.3), удобно перейти к матричным обозначениям:

$$(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (x') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad [a] = (a_1 \dots a_n), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя операции сложения и умножения матриц, уравнения (6.4.2) и (6.4.3) запишем в виде

$$[a](x) + a_0 = 0, \quad (6.4.2')$$

$$(x)^t A(x) + 2[a](x) + a_0 = 0. \quad (6.4.3')$$

В последнем уравнении $(x)^t$ обозначает матрицу, транспонированную к столбцу (x) , т. е. строку $(x_1 \dots x_n)$.

Подставив в (6.4.2') вместо столбца (x) его выражение из формул (6.4.3) предыдущего параграфа, получим

$$[a](S(x') + (\alpha)) + a_0 = 0 \quad \text{или} \quad ([a]S)(x') + [a](\alpha) + a_0 = 0.$$

Таким образом, мы получили, что фигура, имеющая в репере $(O, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ линейное уравнение (6.4.2'), в репере $(O', \bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$ имеет уравнение такого же вида

$$[a'](x') + a'_0 = 0,$$

где $[a'] = [a]S$, $a'_0 = [a](\alpha) + a_0$. При этом столбец $[a']$ старших коэффициентов не нулевой, поскольку в противном случае, т. е. если $[a'] = 0$, получили бы, что столбец $[a] = [a']S^{-1}$ также нулевой, что неверно.

Переходим к квадратным уравнениям. Подставив в (6.4.3') вместо столбца (x) его выражение из формул (6.3.3), получим

$$(S(x') + (\alpha))^t A(S(x') + (\alpha)) + 2[a](S(x') + (\alpha)) + a_0 = 0.$$

После несложных матричных преобразований последнего уравнения получим, что фигура, имеющая в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ квадратное уравнение, в репере $(O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ имеет уравнение такого же вида

$$(x')^t A'(x') + 2[a'](x') + a'_0 = 0,$$

где $A' = S^t A S$, $[a'] = (\alpha)^t A S + [a]S$, $a'_0 = (\alpha)^t A(\alpha) + 2[a](\alpha) + a_0$. Отметим, что в новом уравнении матрица A' старших коэффициентов, очевидно, симметрична ($a'_{ij} = a'_{ji}$) и что $A' \neq 0$, ибо в противном случае, т. е. если $A' = 0$, то $A = (S^t)^{-1} A' S^{-1}$ также нулевая, что неверно. ◀

Наряду с заданием фигур в пространстве \mathcal{A}^n с помощью уравнений используется также *параметрическое* задание фигур. Соответствующие определения мы опускаем, поскольку в n -мерном случае они аналогичны тем, которые были даны в § 2.2 для плоскости \mathbf{E}^2 и пространства \mathbf{E}^3 .

Рассмотрим способы задания плоскостей в пространстве \mathcal{A}^n . Пусть $\mathcal{B}^k = M_0 + \mathbf{W}^k$ – k -мерная плоскость в n -мерном аффинном пространстве \mathcal{A}^n , $k > 0$.

Зафиксируем в \mathcal{A}^n точку O и обозначим: $\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-вектор начальной точки M_0 плоскости \mathcal{B}^k ; $\vec{r} = \overline{OM}$ – радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathcal{A}^n$. Пусть $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ – базис направляющего пространства \mathbf{W}^k плоскости \mathcal{B}^k . Далее, исходя из определения плоскости, запишем несколько эквивалентных утверждений:

$$M \in \mathcal{B}^k \Leftrightarrow \overline{M_0 M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \in \mathbf{W}^k \Leftrightarrow \exists t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbf{F}, \vec{r} - \vec{r}_0 = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots + t_k \vec{a}_k.$$

Таким образом, радиус-вектор \vec{r} произвольной точки M плоскости может быть записан в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots + t_k \vec{a}_k. \quad (6.4.4)$$

Возникает биективное отображение

$$\vec{r} : \mathbf{F}^k \rightarrow \overline{\mathcal{B}^k}, (t_1, t_2, \dots, t_k) \mapsto \vec{r}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots + t_k \vec{a}_k \quad (6.4.5)$$

k -й декартовой степени \mathbf{F}^k основного поля \mathbf{F} на множество радиус-векторов $\overline{\mathcal{B}^k}$ всех точек плоскости \mathcal{B}^k . Отображение (6.4.5) является параметризацией множества $\overline{\mathcal{B}^k}$, оно называется векторно-параметрическим заданием плоскости \mathcal{B}^k . Допуская вольность речи, равенство (6.4.5) называют также векторно-параметрическим уравнением плоскости \mathcal{B}^k , символы t_1, t_2, \dots, t_k из этого равенства – параметрами.

Пусть теперь $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – аффинный репер в пространстве \mathcal{A}^n ; (x_1^0, \dots, x_n^0) – координаты в этом репере начальной точки M^0 плоскости \mathcal{B}^k (совпадающие с координатами радиус-вектора \vec{r}_0 в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$); (x_1, \dots, x_n) – координаты произ-

вольной точки $M \in \mathcal{A}^n$ (совпадающие с координатами радиус-вектора \vec{r} в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$); $(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, координаты вектора \vec{a}_j в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Используя эти обозначения, перепишем векторное равенство (6.4.4) в координатах. Получим

[illegible]

Возникает биективное отображение k -й декартовой степени \mathbf{F}^k основного поля \mathbf{F} на множество $\tilde{\mathcal{B}}^k$ координат всех точек плоскости \mathcal{B}^k

$$x: \mathbf{F}^k \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}^k, t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \mapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad (6.4.7)$$

где $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ определяются из равенств (6.4.6):

$$x_i(t) = x_i^0 + t_1 \alpha_{i1} + t_2 \alpha_{i2} + \dots + t_k \alpha_{ik}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Отображение (6.4.6) (или (6.4.7)) называется **координатно-параметрическим** заданием плоскости B^k . Равенства (6.4.6) называются также **параметрическими уравнениями в координатах** плоскости B^k . Наиболее часто встречается координатно-параметрическое задание прямой, оно имеет вид

[illegible]

Здесь $(x_1^0, ..., x_n^0)$ – координаты начальной точки прямой; $(l_1, ..., l_n)$ – координаты направляющего вектора прямой – базисного вектора направляющего пространства.

Если $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – аффинный репер в пространстве \mathcal{A}^n , то любое уравнение $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ с n неизвестными задает в \mathcal{A}^n фигуру, состоящую из всех точек пространства, координаты которых являются решениями этого уравнения. Выясним, какую фигуру задает линейное уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (6.4.8)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in F$.

Мы считаем, что хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в уравнении (6.4.8) отличен от нуля. Пусть для определенности $a_n \neq 0$. Тогда

$$x_n = \frac{b}{a_n} - \frac{a_1}{a_n} x_1 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_{n-1} -$$

общее решение уравнения (6.4.8), здесь x_1, \dots, x_{n-1} – свободные неизвестные, каждая из которых независимо от других может принимать любые значения из поля F .

[illegible]

Из теории систем линейных уравнений известно, что число k , т. е. размерность \mathbf{W}^k (а также плоскости \mathcal{B}^k), вычисляется по формуле

$$k = n - r,$$

где r – ранг матрицы (a_{ij}) .

Определение 6.4.3. Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – аффинный репер в пространстве \mathcal{A}^n . Если система уравнений (6.4.11) задает плоскость B^k в пространстве \mathcal{A}^n , то говорят, что (6.4.11) – **общие уравнения** плоскости B^k в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Покажем, что верно и обратное, т. е. любая плоскость в данном репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ аффинного пространства \mathcal{A}^n может быть задана общими уравнениями. Пусть $\mathcal{B}^k = M_0 + \mathbf{W}^k$ – k -мерная плоскость в n -мерном аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Из теории систем линейных уравнений известно, что при фиксировании базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ векторного пространства \mathbf{V}^n для любого подпространства \mathbf{W}^k существует однородная система линейных уравнений (6.4.12), задающая \mathbf{W}^k . Пусть начальная точка M^0 плоскости \mathcal{B}^k имеет в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ координаты (x_1^0, \dots, x_n^0) . Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ определим элемент $b_i \in \mathbf{F}$ равенством

$$b_i = a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0$$

и рассмотрим систему линейных уравнений (6.4.11), в правых частях которых стоят определенные выше b_i . Полученная система (6.4.11) совместна ((x_1^0, \dots, x_n^0) – решение системы), следовательно, как отмечено выше, она задает некоторую плоскость в пространстве \mathcal{A}^n , направляющее пространство которой задается соответствующей однородной системой, т. е. совпадает с \mathbf{W}^k . Если заметить, что эта плоскость проходит через точку M_0 ((x_1^0, \dots, x_n^0) – решение системы), то можно утверждать, что система (6.4.11) задает плоскость \mathcal{B}^k . Проведенные рассуждения показывают, что справедлива следующая теорема, устанавливающая тесную связь между плоскостями в конечномерных аффинных пространствах и системами линейных уравнений.

Теорема 6.4.2. Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – репер в аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Тогда:

(i) каждая совместная система линейных уравнений (6.4.11) задает в данном репере плоскость B^k , направляющее пространство которой задается соответствующей однородной системой (6.4.12). Размерность плоскости определяется формулой $k = n - \text{rang}(a_{ij})$;

(ii) любая плоскость в пространстве A^n может быть задана в данном репере системой линейных уравнений (6.4.11).

Упражнение 6.4.1. (i) Докажите, что минимальное число уравнений в системе (6.4.11), задающей k -мерную плоскость в n -мерном аффинном пространстве, равно $n - k$.

(ii) Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – репер в аффинном пространстве A^n . Запишите параметрические и общие уравнения координатных плоскостей, определяемых этим репером.

§ 6.5. АФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом параграфе \mathcal{A} и \mathcal{A}' обозначают аффинные пространства, связанные соответственно с векторными пространствами \mathbf{V} и \mathbf{V}' над одним и тем же полем \mathbb{F} .

Определение 6.5.1. *Отображение $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, $M \mapsto M'$ называется **аффинным отображением** пространства \mathcal{A} в пространство \mathcal{A}' , если существует линейный оператор $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ такой, что для любых точек $M, N \in \mathcal{A}$ верно равенство $\varphi(\overline{MN}) = \overline{f(M)f(N)}$. Оператор φ называется **однородной частью** отображения f .*

Следующее утверждение показывает, что однородная часть φ аффинного отображения $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ определяется однозначно и что отображение f можно задать, указав образ одной точки и его однородную часть, каковые можно выбирать произвольно.

Теорема 6.5.1. *Пусть M_0 и M'_0 – точки в аффинных пространствах \mathcal{A} и \mathcal{A}' и пусть $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ – линейный оператор. Тогда существует единственное аффинное отображение $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ с однородной частью φ и такое, что $f(M_0) = M'_0$.*

Доказательство. Пусть

$$\Phi_{M_0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{V}, \quad M \mapsto \overline{M_0 M} \quad \text{и} \quad \Phi_{M'_0} : \mathcal{A}' \rightarrow \mathbf{V}', \quad M' \mapsto \overline{M'_0 M'} -$$

операции перехода от точек к их радиус-векторам (векторизации аффинных пространств (см. § 6.1)). Выше было показано (утверждение 6.1.3), что каждое из отображений Φ_{M_0} и $\Phi_{M'_0}$ – биекции, в частности, для них существуют обратные отображения $(\Phi_{M_0})^{-1}$ и $(\Phi_{M'_0})^{-1}$. Убедимся, что отображение

$$f = (\Phi_{M'_0})^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{M_0} \tag{6.5.1}$$

искомое. Отметим, прежде всего, что линейный оператор φ однозначно определяется отображением f . Действительно, умножив равенство (6.5.1) слева на $\Phi_{M'_0}$ и справа на $(\Phi_{M_0})^{-1}$, получим, что

$$\varphi = \Phi_{M'_0} \circ f \circ (\Phi_{M_0})^{-1}. \tag{6.5.2}$$

Далее, для любых точек $M, N \in \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{MN}) &= \varphi(\overline{M_0 N} - \overline{M_0 M}) = \varphi(\overline{M_0 N}) - \varphi(\overline{M_0 M}) = \\ &= ((\Phi_{M'_0}) \circ f \circ (\Phi_{M_0})^{-1})(\overline{M_0 N}) - ((\Phi_{M'_0}) \circ f \circ (\Phi_{M_0})^{-1})(\overline{M_0 M}) = \\ &= \Phi_{M'_0}(f(N)) - \Phi_{M'_0}(f(M)) = \overline{M'_0 f(N)} - \overline{M'_0 f(M)} = \overline{f(M)f(N)}. \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, что $f(M_0) = M'_0$. Если $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – какое-то аффинное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы, то для любой точки $M \in \mathcal{A}$ верно $\overline{M'_0 g(M)} = \varphi(\overline{M_0 M})$. Подействуем на обе части последнего равенства отображением $(\Phi_{M'_0})^{-1}$. Получим, что

$$g(M) = (\Phi_{M'_0})^{-1}(\varphi(\overline{M_0 M})) = ((\Phi_{M'_0})^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{M_0})(M) = f(M),$$

т. е. $g = f$. ◀

Следствие 6.5.1. Любое аффинное отображение n -мерного аффинного пространства $\mathcal{A} = \mathcal{A}^n$ в аффинное пространство \mathcal{A}' однозначно определяется образами $n+1$ точек общего положения, эти образы можно выбирать произвольно.

Доказательство. Покажем вначале, что существует аффинное отображение $f: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}'$, переводящее точки общего положения M_0, M_1, \dots, M_n пространства \mathcal{A}_n в произвольные точки M'_0, M'_1, \dots, M'_n пространства \mathcal{A}' , т. е. такое, что $f(M_i) = M'_i$. Поскольку M_0, M_1, \dots, M_n – точки общего положения в \mathcal{A}_n , то векторы $(\vec{a}_1 = \overline{M_0 M_1}, \vec{a}_2 = \overline{M_0 M_2}, \dots, \vec{a}_n = \overline{M_0 M_n})$ – базис векторного пространства \mathbf{V}^n , связанного с \mathcal{A}_n . Обозначим $\vec{a}_i = \overline{M_0 M'_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, векторы пространства \mathbf{V}' . Известно из алгебры ([2, теорема 19.1]), что существует единственный линейный оператор $\varphi: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}'$, отображающий векторы базиса пространства \mathbf{V}^n в произвольно выбранные векторы пространства \mathbf{V}' , т. е. такой, что $\varphi(\vec{a}_i) = \vec{a}'_i$. Согласно теореме 6.5.1, существует аффинное отображение $f: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}'$ с однородной частью φ и переводящее точку M_0 в M'_0 . Очевидно, что $f(M_i) = M'_i$. Пусть теперь $g: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}'$ – какое-то аффинное отображение с однородной частью ψ , переводящее точку M_i в точку M'_i . Тогда $\psi(\vec{a}_i) = \psi(\overline{M_0 M_i}) = \overline{M'_0 M'_i} = \varphi(\vec{a}_i)$ и, следовательно, $\psi = \varphi$. Вновь, согласно теореме 6.5.1, получаем, что $g = f$. ◀

Приведем несколько примеров аффинных отображений.

Это, прежде всего, тождественное отображение $\text{Id}_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $M \mapsto M$. Однородная часть этого аффинного отображения есть, очевидно, тождественный линейный оператор соответствующего векторного пространства $\text{Id}_{\mathbf{V}}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, $\vec{a} \mapsto \vec{a}$.

Для любых аффинных пространств \mathcal{A} и \mathcal{A}' и любой фиксированной точки $M'_0 \in \mathcal{A}'$ постоянное отображение $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, $M \mapsto M'_0$ является аффинным, его однородная часть – нулевой линейный оператор $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$, $\vec{a} \mapsto \vec{0}$.

Важными примерами аффинных отображений являются параллельные переносы и гомотетии.

Определение 6.5.2. Пусть \vec{a} – вектор пространства \mathbf{V} . Параллельным переносом аффинного пространства \mathcal{A} на вектор \vec{a} называется отображение

$$\tau_{\vec{a}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, M \mapsto M', \text{ где } \overline{MM'} = \vec{a}.$$

Для любых точек $M, N \in \mathcal{A}$ имеем

$$\overline{\tau_{\vec{a}}(M)\tau_{\vec{a}}(N)} = \overline{\tau_{\vec{a}}(M)M} + \overline{MN} + \overline{N\tau_{\vec{a}}(N)} = -\vec{a} + \overline{MN} + \vec{a} = \overline{MN}. \quad (6.5.3)$$

Равенства (6.5.3) показывают, что $\tau_{\vec{a}}$ – аффинное отображение пространства \mathcal{A} в себя с однородной частью $\text{Id}_{\mathbf{V}}$.

Определение 6.5.3. Пусть λ – ненулевой элемент поля \mathbf{F} , O – фиксированная точка пространства \mathcal{A} . Гомотетией пространства \mathcal{A} с центром O и коэффициентом λ называется отображение

$$h_{O,\lambda}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, M \mapsto M', \text{ где } \overline{OM'} = \lambda \overline{OM}.$$

Из определения вытекает, что $h_{O,\lambda}(O) = O$. Для любых точек $M, N \in \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned}\overline{h_{O,\lambda}(M)h_{O,\lambda}(N)} &= \overline{h_{O,\lambda}(M)h_{O,\lambda}(O)} + \overline{h_{O,\lambda}(O)h_{O,\lambda}(N)} = \\ &= -\overline{Oh_{O,\lambda}(M)} + \overline{Oh_{O,\lambda}(N)} = -\lambda\overline{OM} + \lambda\overline{ON} = \lambda\overline{MN}.\end{aligned}$$

Таким образом, гомотетия $h_{O,\lambda}$ пространства \mathcal{A} с центром O и коэффициентом λ – это аффинное отображение пространства \mathcal{A} с однородной частью, являющейся гомотетией $h_\lambda : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, $\vec{a} \mapsto \lambda\vec{a}$, соответствующего векторного пространства.

Следующее утверждение показывает, каким образом аффинные отображения действуют на плоскости – основные геометрические объекты в аффинном пространстве.

Утверждение 6.5.1. Пусть $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – аффинное отображение с однородной частью $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$. Если $\mathcal{B} = M_0 + \mathbf{W}$ – плоскость в пространстве \mathcal{A} с начальной точкой M_0 и направляющим пространством \mathbf{W} , то ее образ $f(\mathcal{B})$ – плоскость в пространстве \mathcal{B} с начальной точкой $f(M_0)$ и направляющим пространством $\varphi(\mathbf{W})$.

Доказательство. Плоскость \mathcal{B} состоит из всех точек $M \in \mathcal{A}$ таких, что $\overline{M_0M} \in \mathbf{W}$. По определению аффинного отображения для любой точки $f(M) \in f(\mathcal{B})$ верно $\overline{f(M_0)f(M)} = \overline{\varphi(\overline{M_0M})} \in \varphi(\mathbf{W})$, т. е. $f(\mathcal{B}) \subset f(M_0) + \varphi(\mathbf{W})$. Обратно, если M' – любая точка плоскости $f(M_0) + \varphi(\mathbf{W})$, то $\overline{f(M_0)M'} = \vec{a}' \in \varphi(\mathbf{W})$. Если $\vec{a} \in \mathbf{W}$ – такой вектор, что $\varphi(\vec{a}) = \vec{a}'$, то $M' = f(M)$, где $\overline{M_0M} = \vec{a}$, т. е. $M \in \mathcal{B}$. Итак, $f(\mathcal{B}) = f(M_0) + \varphi(\mathbf{W})$. ►

Выясним, как аффинное отображение задается в координатах. Пусть $f : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{B}^m$ – аффинное отображение конечномерных аффинных пространств над полем \mathbf{F} и $\varphi : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^m$ – его однородная часть. Отображение f можно задать в координатах, если выбрать в пространствах \mathcal{A}^n и \mathcal{B}^m аффинные реперы $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и $(O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$ соответственно. Найдем связь между координатами (x_1, \dots, x_n) произвольной точки $M \in \mathcal{A}^n$ в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и координатами (x'_1, \dots, x'_m) ее образа $f(M) \in \mathcal{B}^m$ в репере $(O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$. Для этого нам понадобятся следующие данные: координаты $(\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\beta_i \in \mathbf{F}$, точки $f(O)$ в репере $(O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$ и матрица $T = (t_{ij})$, $t_{ij} \in \mathbf{F}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, линейного оператора $\varphi : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^m$ относительно базисов $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$.

Запишем равенство треугольника для трех точек:

$$\overline{O'f(M)} = \overline{f(O)f(M)} + \overline{O'f(O)}. \quad (6.5.4)$$

Равенство (6.5.4) эквивалентно таким же равенствам для каждой из координат векторов, участвующих в (6.5.4), в базисе $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$. Координаты вектора $\overline{O'f(M)}$ совпадают с координатами точки $f(M)$ в репере $(O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$, т. е. равны (x'_1, \dots, x'_m) . Аналогично, координаты вектора $\overline{O'f(O)}$ равны $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Поскольку $\overline{f(O)f(M)} = \varphi(\overline{OM})$, то координаты вектора $\overline{f(O)f(M)}$ в базисе $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$ получаются по формулам, известным из линейной алгебры. Эти формулы выражают координаты (y_1, \dots, y_m) вектора $\varphi(\overline{OM})$ в базисе $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$ через координаты (x_1, \dots, x_n) его прообраза \overline{OM} в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и элементы матрицы T :

$$y_i = t_{i1}x_1 + \dots + t_{in}x_n, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = t_{11}x_1 + \dots + t_{1n}x_n + \beta_1, \\ x'_2 = t_{21}x_1 + \dots + t_{2n}x_n + \beta_2, \\ \\ x'_m = t_{m1}x_1 + \dots + t_{mn}x_n + \beta_m. \end{array} \right. \quad (6.5.5)$$
$$(x') = T(x) + (\beta). \quad (6.5.5')$$

§ 6.6. ИЗОМОРФИЗМЫ И АВТОМОРФИЗМЫ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Учитывая последнее следствие, для изучения конечномерных аффинных пространств над данным полем \mathbf{F} достаточно ограничиться одним пространством для каждой размерности. Например, для каждого натурального числа n в качестве такого представителя класса изоморфных аффинных пространств можно взять

n -мерное арифметическое аффинное пространство \mathbf{F}^n , т. е. пространство строк длины n над полем \mathbf{F} (см. § 6.1).

Утверждение 6.6.2. (i) Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – аффинные пространства над полем \mathbf{F} и $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ – аффинные отображения с однородными частями соответственно φ и ψ . Тогда $g \circ f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ – аффинное отображение с однородной частью $\varphi \circ \psi$.

(ii) Если $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – изоморфизм аффинных пространств с однородной частью φ , то $f^{-1}: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ – изоморфизм аффинных пространств с однородной частью φ^{-1} .

Доказательство. (i) Пусть $M_0 \in \mathcal{A}$ и $M'_0 = f(M_0)$, $M''_0 = g(M'_0)$. Тогда, согласно формуле (1),

$$f = (\Phi_{M'_0})^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{M_0}, \quad g = (\Phi_{M''_0})^{-1} \circ \psi \circ \Phi_{M'_0},$$

и, следовательно,

$$g \circ f = (\Phi_{M''_0})^{-1} \circ (\varphi \circ \psi) \circ \Phi_{M_0},$$

что доказывает часть (i).

(ii) Вновь опираясь на формулу (1), получаем, что для f^{-1} справедливо равенство

$$f^{-1} = (\Phi_{M_0})^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \Phi_{M'_0},$$

что доказывает часть (ii). ◀

Обозначим $\text{Aut}(\mathcal{A})$ множество всех автоморфизмов аффинного пространства \mathcal{A} . Как следует из утверждения 6.6.2, $\text{Aut}(\mathcal{A})$ – группа относительно композиции отображений. В эту группу, очевидно, входят всевозможные параллельные переносы и гомотетии.

Утверждение 6.6.3. Множество $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ всех параллельных переносов аффинного пространства \mathcal{A} является нормальной подгруппой группы $\text{Aut}(\mathcal{A})$, изоморфной аддитивной группе $(\mathbf{V}, +)$ векторного пространства \mathbf{V} .

Доказательство. Поскольку для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ верно равенство $\tau_{\vec{a}} \circ \tau_{\vec{b}} = \tau_{\vec{a}+\vec{b}}$ и $\text{Id}_{\mathcal{A}} = \tau_{\vec{0}}$, то $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ – подгруппа группы $\text{Aut}(\mathcal{A})$. Легко проверить, что отображение

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{V}, \tau_{\vec{a}} \mapsto \vec{a}$$

биективно и, следовательно, является изоморфизмом групп. Пусть f – изоморфизм аффинного пространства \mathcal{A} с однородной частью φ . Для того чтобы доказать, что $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ – нормальная подгруппа группы $\text{Aut}(\mathcal{A})$, покажем, что

$$f \circ \tau_{\vec{a}} \circ f^{-1} = \tau_{\varphi(\vec{a})} \quad (6.6.1)$$

для любого $\vec{a} \in \mathbf{V}$. Пусть M – произвольная точка пространства \mathcal{A} . Тогда, поскольку f – биекция, то $f(M)$ – также произвольная точка пространства \mathcal{A} . Подействуем левой и правой частью равенства (6.6.1) на точку $f(M)$. Пусть

$$(f \circ \tau_{\vec{a}} \circ f^{-1})(f(M)) = f(\tau_{\vec{a}}(M)) = M', \quad \tau_{\varphi(\vec{a})}(f(M)) = M''.$$

Используя определение аффинного отображения пространств и определение параллельного переноса, имеем

$$\overline{f(M)M'} = \overline{f(M)f(\tau_{\vec{a}}(M))} = \overline{\varphi(\overline{M\tau_{\vec{a}}(M)})} = \overline{\varphi(\vec{a})} \quad \text{и} \quad \overline{f(M)M''} = \overline{\varphi(\vec{a})}. \quad (6.6.2)$$

Из равенств (6.6.2) вытекает, что $M' = M''$, т. е. отображения в левой и правой частях равенства (6.6.1) одинаково действуют на произвольную точку $f(M)$, т. е. эти отображения совпадают. ◀

Утверждение 6.6.4. Пусть A – аффинное пространство над полем F . Для любой точки $O \in A$ множество $H_O(A)$ всех гомотетий с центром O является подгруппой группы $\text{Aut}(A)$, изоморфной мультипликативной группе F^* поля F .

Доказательство. Легко проверить, что $h_{O\lambda_1} \circ h_{O\lambda_2} = h_{O\lambda_1\lambda_2}$. Отсюда следует, что $H_O(A)$ – подгруппа группы $\text{Aut}(A)$ и что отображение

$$H_O(A) \rightarrow D^*, h_{O\lambda} \mapsto \lambda, \quad (6.6.3)$$

сюръективный гомоморфизм групп. Поскольку

$$h_{O\lambda} = \text{Id}_A \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

то ядро этого гомоморфизма сводится к $\{\text{Id}_A\}$. Следовательно, (6.6.3) – изоморфизм групп. ◀

Определение 6.6.2. Аффинное отображение $f: A \rightarrow A$ аффинного пространства A в себя называется **центраффинным**, если у отображения f есть неподвижная точка O , т. е. такая, что $f(O) = O$. Точка O называется **центром** отображения f .

Примером центраффинного отображения может служить любая гомотетия $h_{O,\lambda}$. Напротив, никакой параллельный перенос $\tau_{\vec{a}}$ на ненулевой вектор \vec{a} не является центраффинным отображением.

Утверждение 6.6.5. Пусть O – произвольная точка аффинного пространства A ; $\text{Aut}_O(A)$ – множество всех центраффинных автоморфизмов пространства A с центром O . Тогда $\text{Aut}_O(A)$ – подгруппа группы $\text{Aut}(A)$, изоморфная группе $\text{Aut}(V)$ автоморфизмов векторного пространства V .

Доказательство. Пусть $f, g \in \text{Aut}_O(A)$. Поскольку O – неподвижная точка автоморфизмов f и g , то, очевидно, O – неподвижная точка автоморфизма $g \circ f$. Итак, $g \circ f \in \text{Aut}_O(A)$, т. е. $\text{Aut}_O(A)$ – подгруппа группы $\text{Aut}(A)$. Рассмотрим отображение

$$\varepsilon: \text{Aut}_O(A) \rightarrow \text{Aut}(V), f \mapsto \varphi. \quad (6.6.4)$$

Из утверждения 6.5.1 следует, что это отображение – биекция. Из утверждения 6.6.2 (пункт(i)) вытекает, что $\varepsilon(g \circ f) = \varepsilon(g) \circ \varepsilon(f)$. Это означает, что (6.6.4) – гомоморфизм групп. Таким образом, отображение (6.6.4) – изоморфизм групп. ◀

Сейчас мы покажем, что группа $\text{Aut}(A)$ автоморфизмов пространства A достаточно просто конструируется по своей нормальной подгруппе параллельных переносов $T(A)$ (которая (утверждение 6.6.3) изоморфна аддитивной группе векторного пространства V) и группе автоморфизмов $\text{Aut}(V)$ векторного пространства V . Для этого нам понадобится понятие **полупрямого произведения** из теории групп.

Определение 6.6.3. Говорят, что группа G есть **полупрямое произведение** своих подгрупп H и K , если H – нормальная подгруппа G и любой элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = hk$, где $h \in H, k \in K$.

Для полупрямого произведения будем использовать запись $G = H \rtimes K$. Из определения вытекает, что $H \cap K = \{e\}$, e – единица группы G . Действительно, любой элемент $g \in H \cap K$ можно представить в виде $g = ge$, $g \in H, e \in K$, а также в виде $g = eg$, $e \in H, g \in K$. В силу единственности представления такого типа получаем,

что $g = e$. Кроме того, представляя элементы группы G в виде $g = hk$, $h \in H$, $k \in K$, легко находить их произведение: если $g_1 = h_1 k_1$, $g_2 = h_2 k_2$, то

$$g_1 g_2 = (h_1 k_1)(h_2 k_2) = h_1 (k_1 h_2 k_1^{-1}) k_1 k_2 = h_1 \varphi_{k_1}(h_2) k_1 k_2.$$

Здесь φ_{k_1} – автоморфизм подгруппы H , определяемый формулой $\varphi_{k_1}(h) = k_1 h k_1^{-1}$.

Теорема 6.6.1. Пусть \mathcal{A} – аффинное пространство, связанное с векторным пространством \mathbf{V} ; O – произвольная точка пространства \mathcal{A} . Группа $\text{Aut}(\mathcal{A})$ всех автоморфизмов пространства \mathcal{A} является полупрямым произведением нормальной подгруппы параллельных переносов $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ и подгруппы центроаффинных автоморфизмов $\text{Aut}_O(\mathcal{A})$: $\text{Aut}(\mathcal{A}) = \mathbf{T}(\mathcal{A}) \lambda \text{Aut}_O(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $f \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ и $f(O) = O'$. Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$ и $g = \tau_{-\vec{a}} \circ f$. Тогда $g(O) = O$, т. е. $g \in \text{Aut}_O(\mathcal{A})$. Таким образом, любой автоморфизм $f \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ представляется в виде произведения

$$f = \tau_{\vec{a}} \circ g, \text{ где } \tau_{\vec{a}} \in \mathbf{T}(\mathcal{A}), g \in \text{Aut}_O(\mathcal{A}). \quad (6.6.5)$$

Убедимся, что разложение (6.6.5) элемента $f \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ единственно. Действительно, пусть $f = \tau_{\vec{b}} \circ h$, где $\tau_{\vec{b}} \in \mathbf{T}(\mathcal{A})$, $h \in \text{Aut}_O(\mathcal{A})$. Используя две записи отображения f , найдем $f(O)$. Получим, что $O' = f(O) = \tau_{\vec{a}}(O)$ и $O' = f(O) = \tau_{\vec{b}}(O)$. Откуда следует, что $\vec{a} = \vec{b}$, т. е. $\tau_{\vec{a}} = \tau_{\vec{b}}$, и далее $g = h$. Итак, мы показали, что

$$\text{Aut}(\mathcal{A}) = \mathbf{T}(\mathcal{A}) \lambda \text{Aut}_O(\mathcal{A}). \blacktriangleleft$$

Отметим, что согласно утверждениям 6.6.3 и 6.6.5, имеем $\mathbf{T}(\mathcal{A}) \cong (\mathbf{V}, +)$ и $\text{Aut}_O(\mathcal{A}) \cong \text{Aut}(\mathbf{V})$. Это означает, что для группы всех автоморфизмов аффинного пространства \mathcal{A} есть и другое представление в виде полупрямого произведения: $\text{Aut}(\mathcal{A}) \cong (\mathbf{V}, +) \lambda \text{Aut}(\mathbf{V})$.

Утверждение 6.6.6. (i) При изоморфизме аффинных пространств образом каждой k -мерной плоскости, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, является k -мерная плоскость.

(ii) Изоморфизм аффинных пространств сохраняет характеристики пар плоскостей, в частности, при изоморфизме сохраняется взаимное расположение плоскостей.

Доказательство. (i) Пусть $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – изоморфизм аффинных пространств с однородной частью $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$; $\mathcal{B} = M_0 + \mathbf{W}^k$ – k -мерная плоскость в пространстве \mathcal{A} . Как известно (утверждение 6.5.1), ее образ $f(\mathcal{B})$ – плоскость в пространстве \mathcal{A}' с начальной точкой $f(M_0)$ и направляющим пространством $\varphi(\mathbf{W}^k)$. Поскольку $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ – изоморфизм векторных пространств (утверждение 6.6.1), то $\dim f(\mathcal{B}) = \dim \varphi(\mathbf{W}^k) = k$.

(ii) Пусть $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – изоморфизм аффинных пространств и $(\mathcal{B}^k, \mathcal{P}^m)$ – пара плоскостей в аффинном пространстве \mathcal{A} с направляющими пространствами \mathbf{W}^k и \mathbf{U}^m соответственно. Пусть (k, m, s, d) – характеристика данной пары плоскостей (определение 4.5.2). Тогда $(f(\mathcal{B}), f(\mathcal{P}))$ – пара плоскостей в аффинном пространстве \mathcal{A}' . Пусть (k', m', s', d') – характеристика этой пары. Согласно доказанному пункту (i), $k' = k$, $m' = m$. Поскольку $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ – изоморфизм векторных пространств, то

$$\varphi(\mathbf{W}^k \cap \mathbf{U}^m) = \varphi(\mathbf{W}^k) \cap \varphi(\mathbf{U}^m)$$

и, следовательно,

$$d' = \dim(\varphi(\mathbf{W}^k) \cap \varphi(\mathbf{U}^m)) = \dim \varphi(\mathbf{W}^k \cap \mathbf{U}^m) = \dim(\mathbf{W}^k \cap \mathbf{U}^m) = d.$$

Итак, для характеристик (k, m, s, d) и (k', m', s', d') доказано совпадение первых, вторых и четвертых чисел. Поскольку оставшееся число выражается через упомянутые по формулам $s = k + m - d$ либо $s = k + m - d + 1$ в зависимости от того, пересекаются плоскости либо нет, то достаточно убедиться, что $f(\mathcal{B}^k) \cap f(\mathcal{P}^m) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}^k \cap \mathcal{P}^m \neq \emptyset$. Последнее верно, поскольку f – биекция. ◀

Следующая важная теорема дает геометрическую характеристику автоморфизмов конечномерного аффинного пространства.

Теорема 6.6.2. Пусть \mathcal{A}^n – конечномерное аффинное пространство размерности $n \geq 2$, связанное с векторным пространством \mathbf{V}^n над полем \mathbf{F} , характеристика¹ которого отлична от 2. Биективное отображение $f: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n$ является автоморфизмом аффинного пространства \mathcal{A}^n тогда и только тогда, когда f сохраняет коллинеарность точек, т. е. для любых точек A, B, C , лежащих на одной прямой, их образы $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ также лежат на одной прямой.

В этом учебном пособии мы не приводим доказательство теоремы, его можно посмотреть в книге [14]. Поскольку вещественные аффинные пространства удовлетворяют условию последней теоремы, то можно утверждать, что два различных определения термина *аффинное преобразование* (определения 5.1.1 и 6.6.1) эквивалентны.

Напомним, ранее была определена группа $\text{Aut}(\mathcal{A})$ всех автоморфизмов (аффинных преобразований) аффинного пространства \mathcal{A} . Эту группу будем называть **аффинной группой** пространства \mathcal{A} . Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры в пространстве \mathcal{A} . Будем говорить, что фигура Φ_1 **аффинно эквивалентна** фигуре Φ_2 (обозначение $\Phi_1 \sim \Phi_2$), если существует аффинное преобразование $f \in \text{Aut}(\mathcal{A})$, переводящее Φ_1 в Φ_2 , т. е. такое, что $f(\Phi_1) = \Phi_2$. Легко проверить, что введенное отношение является отношением эквивалентности в смысле теории множеств (см. [9]), и, следовательно, множество всех фигур пространства \mathcal{A} разбивается на классы эквивалентных. **Аффинной классификацией** некоторой совокупности фигур в аффинном пространстве называется разбиение этой совокупности на классы аффинно эквивалентных фигур.

Упражнение 6.6.1. (i) Докажите, что все треугольники в пространстве \mathbf{E}^3 составляют один аффинный класс.

(ii) Докажите, что все параллелограммы в пространстве \mathbf{E}^3 составляют один аффинный класс.

(iii) Докажите, что не любые две трапеции аффинно эквивалентны. Найдите необходимое и достаточное условие аффинной эквивалентности трапеций.

¹ Понятие характеристики поля \mathbf{F} вводится следующим образом. Есть поля, в которых сумма любого количества единиц поля отлична от нуля. Таковыми, например, являются поля рациональных чисел \mathbf{Q} , вещественных чисел \mathbf{R} , комплексных чисел \mathbf{C} . Такие поля называются *полями нулевой характеристики*. Есть также поля положительной характеристики, для которых существует натуральное число n , такое, что $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = 0$. Пример такого поля – поле

классов-вычетов \mathbf{Z} / p множества целых чисел по простому модулю p (см. [13]). Минимальное из таких чисел n суть простое число p , которое и называется *характеристикой поля \mathbf{F}* .

Как показывает следующая теорема, один аффинный класс составляют все плоскости одной размерности.

Теорема 6.6.3. *Плоскости $B^k = M_0 + W^k$ и $P^m = N_0 + U^m$ в аффинном пространстве A^n , связанном с векторным пространством V^n над полем F , аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда $k = m$.*

Доказательство. Пусть $B^k \sim P^m$, т. е. $P^m = f(B^k)$ для некоторого аффинного преобразования $f \in \text{Aut}(A)$. Тогда, согласно утверждению 6.6.6, (i), $k = m$.

Обратно, пусть $k = m$. Пусть $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$ и $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ – базисы направляющих пространств W^k и U^k данных плоскостей. Дополним их до базисов пространства V^n : $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ и $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$. Известно из линейной алгебры (см. [2]), что существует линейный оператор $\varphi: V^n \rightarrow V^n$, переводящий соответствующие векторы базисов друг в друга, т. е. такой, что $\varphi(\bar{a}_i) = \bar{b}_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Очевидно, что φ – автоморфизм пространства V^n . По теореме 6.5.1 существует аффинное отображение $f: A^n \rightarrow A^n$ с однородной частью φ , переводящее точку M_0 в N_0 . Ясно, что $f \in \text{Aut}(A)$ и $f(B^k) = P^k$. ◀

Если рассмотреть теперь фигуры, состоящие из пар плоскостей, то можно показать, что пары плоскостей (B^k, P^m) и $(B^{k'}, P^{m'})$ в аффинном пространстве A^n аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их характеристики, т. е. $(k, m, s, d) = (k', m', s', d')$. Доказательство этого факта аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Таким образом, у фигур в аффинном пространстве есть свойства, которые сохраняются при всех аффинных преобразованиях, например, свойство фигуры быть k -мерной плоскостью или взаимное расположение пар плоскостей. Некоторые другие свойства фигур не сохраняются при всех аффинных преобразованиях, например, свойство фигуры на плоскости E^2 быть квадратом (образом квадрата при аффинном преобразовании может быть любой параллелограмм).

Принято говорить, что совокупность всех свойств первого типа (т. е. сохраняющихся при всех аффинных преобразованиях) составляет **геометрию аффинной группы** $\text{Aut}(A)$ или **аффинную геометрию** пространства A .

Отметим (теорема 6.6.2), что аффинным свойством является свойство точек принадлежать одной прямой, т. е. свойство коллинеарности точек. Более того, простое отношение трех точек одной прямой также принадлежит к аффинной геометрии. Простое отношение $\lambda = (ABC)$ у нас было определено для трех точек евклидовой прямой ($B \neq C$) в § 5.2 как такое число $\lambda \in \mathbf{R}$, что $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$. Это определение, очевидно, годится и для произвольного поля F , только в этом случае $\lambda \in F$. В этом случае годится также доказательство того, что простое отношение сохраняется при всех аффинных преобразованиях, приведенное в § 5.2.

Определение 6.6.4. Пусть A аффинное пространство над полем F . **Отрезком** в пространстве A называется пара точек $\{A, B\}$ пространства A . Точки A и B называются **концами** отрезка. **Серединой** отрезка $\{A, B\}$ называется такая точка $C \in A$, что $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Если отрезок нулевой, т. е. $A = B$, то середина отрезка совпадает с его концами. Пусть отрезок ненулевой, $A \neq B$. Предположим, что C – середина отрезка. Тогда по соотношению Шаля имеем $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ или $2\overline{AC} = \overline{AB}$. Если характеристика поля F отлична от 2, т. е. $2 \neq 0$, то $\overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ и точка C , т. е. середина отрезка, опре-

деляется однозначно. В этом случае простое отношение (ABC) равно 1. Если характеристика поля F равна 2, то отрезок $\{A, B\}$ не имеет середины.

С помощью понятия середины отрезка определим понятие *центра* фигуры в аффинном пространстве.

Определение 6.6.5. Пусть Φ – непустая фигура в аффинном пространстве A . Точка C называется **центром** фигуры Φ , если для любой точки $M \in \Phi$ существует точка $M' \in \Phi$ такая, что C – середина отрезка $\{M, M'\}$.

Из определения и сказанного выше вытекает, что понятие центра фигуры относится к аффинной геометрии.

Упражнение 6.6.2. Приведите примеры, показывающие, что фигура в аффинном пространстве может не иметь центров, может иметь один центр, может иметь более одного центра, при этом центры могут принадлежать фигуре либо не принадлежать.

§ 6.7. БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ ТОЧЕК И БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Важное понятие линейной комбинации векторов векторного пространства, вообще говоря, для точек аффинного пространства не имеет смысла, так как точки нельзя складывать и умножать на числа. Однако если использовать некоторые специальные наборы коэффициентов, то для точек все же можно определить аналог понятия линейной комбинации, и это понятие имеет важные приложения. Точное определение следующее.

Определение 6.7.1. Пусть $M_0, M_1, \dots, M_s, s \in \mathbf{N}$, – точки в аффинном пространстве A над полем F и $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$, причем $\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$. **Барицентрической линейной комбинацией** точек M_0, M_1, \dots, M_s с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ называется точка M , которая обозначается $\lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$ и определяется равенством

$$\overline{OM} = \sum_{i=0}^s \lambda_i \overline{OM_i}, \quad (6.7.1)$$

где O – любая точка пространства A .

Формула (6.7.1) означает, что точка M получается откладыванием от точки O вектора, равного линейной комбинации $\sum_{i=0}^s \lambda_i \overline{OM_i}$. Убедимся, что определение 6.7.1

корректно, т. е. не зависит от выбора точки O . Действительно, пусть точка M определяется равенством (6.7.1). Тогда для любой точки $O' \in A$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{O'M} &= \overline{O'O} + \overline{OM} = 1 \cdot \overline{O'O} + \sum_{i=0}^s \lambda_i \overline{OM_i} = \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i \right) \cdot \overline{O'O} + \sum_{i=0}^s \lambda_i \overline{OM_i} = \\ &= \sum_{i=0}^s \lambda_i (\overline{O'O} + \overline{OM_i}) = \sum_{i=0}^s \lambda_i \overline{O'M_i}. \end{aligned}$$

Пусть теперь \mathcal{A} – конечномерное аффинное пространство и (x_1, \dots, x_n) – координаты точки M ; $(x_{i1}, \dots, x_{in}), i \in \{0, 1, \dots, s\}$, – координаты точек M_0, M_1, \dots, M_s в каком-то репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ пространства \mathcal{A} . Тогда из формулы (6.7.1) вытекает, что

$$x_j = \lambda_1 x_{1j} + \dots + \lambda_s x_{sj}, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (6.7.2)$$

т. е. каждая координата точки M есть линейная комбинация соответствующих координат точек M_i с коэффициентами λ_i . Таким образом, равенство (6.7.2) не зависит от выбора репера и оправдывает обозначение $\lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$.

Точку $M = \sum_{i=0}^s \lambda_i M_i, \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$, называют также **барицентром (центром тяжести) точек** M_0, M_1, \dots, M_s , наделенных массами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$. Это название объяс-

няется тем, что в случае, когда M_0, M_1, \dots, M_s – материальные точки в пространстве E^3 , наделенные массами $m_i > 0$, т. е. рассматриваемая ситуация отражает ту, которая встречается в теоретической механике, то точка $M = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$,

где $\lambda_i = \frac{m_i}{m}, m = \sum_{i=0}^s m_i$, является центром тяжести системы материальных точек $(M_i, m_i), i \in \{0, 1, \dots, s\}$. Напомним, что в механике центром тяжести этой системы

называется такая точка C , что $\sum_{i=0}^s m_i \overline{CM_i} = \vec{0}$. Покажем, что $C = M$. Действительно, выбирая в равенстве (6.7.1) $O = C$, имеем

$$\overline{CM} = \sum_{i=0}^s \lambda_i \overline{CM_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^s m_i \overline{CM_i} = \vec{0},$$

т. е. $C = M$.

Возвращаемся к случаю произвольного аффинного пространства. Если $M = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s, \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$, то коэффициенты λ_i в этом равенстве определяются, вообще говоря, неоднозначно, поскольку векторы $\overline{OM_i}$ в формуле (6.7.1) могут быть линейно зависимы. Ситуация иная, если рассматриваются точки общего положения.

Утверждение 6.7.1. (i) Пусть M_0, \dots, M_s – точки общего положения в аффинном пространстве \mathcal{A} . Если $M = \lambda_0 M_0 + \dots + \lambda_s M_s, \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$, то коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_s$ определяются однозначно.

(ii) Пусть M_0, \dots, M_n – $(n+1)$ точек общего положения в n -мерном аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Тогда каждая точка M пространства \mathcal{A}^n единственным образом может быть представлена в виде барицентрической линейной комбинации

$M = \lambda_0 M_0 + \dots + \lambda_n M_n, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. При этом $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – координаты точки M в репере $(M_0, \overline{M_0 M_1}, \dots, \overline{M_0 M_n})$.

Доказательство. (i) Пусть $M = \lambda_0 M_0 + \dots + \lambda_s M_s, \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$. Тогда, выбирая в равенстве (6.7.1) $O = M_0$, имеем

$$\overline{M_0M} = \sum_{i=0}^s \lambda_i \overline{M_0M_i} = \lambda_0 \overline{M_0M_0} + \sum_{i=1}^s \lambda_i \overline{M_0M_i} = \sum_{i=1}^s \lambda_i \overline{M_0M_i}.$$

Поскольку векторы $\overline{M_0M_i}$, $i \in \{1, \dots, s\}$, линейно независимы, то коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ в последнем разложении определяются однозначно. Тем самым однозначно определяется и набор коэффициентов $\lambda_0, \dots, \lambda_s$ с условием $\sum \lambda_i = 1$.

(ii) Учитывая пункт (i), достаточно показать возможность представления любой точки пространства в виде бариецентрической линейной комбинации точек M_0, \dots, M_n . Пусть (x_1, \dots, x_n) – координаты точки M в репере $(M_0, \overline{M_0M_1}, \dots, \overline{M_0M_n})$,

т. е. $\overline{M_0M} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{M_0M_i}$. Тогда

$$\overline{M_0M} = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \overline{M_0M_0} + \sum_{i=1}^n x_i \overline{M_0M_i}.$$

Полагая $\lambda_i = x_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$, получим нужное представление. ◀

Определение 6.7.2. Пусть (M_0, \dots, M_n) – $(n+1)$ точек общего положения в n -мерном аффинном пространстве \mathcal{A}^n над полем \mathbf{F} , M – произвольная точка пространства \mathcal{A}^n . Набор элементов $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \in \mathbf{F}$ таких, что $M = \lambda_0 M_0 + \dots + \lambda_n M_n$, называется **бариецентрическими координатами**¹ точки M относительно точек общего положения (M_0, \dots, M_n) .

Утверждение 6.7.2. Непустая фигура Φ в аффинном пространстве \mathcal{A} является плоскостью тогда и только тогда, когда Φ содержит бариецентры всех своих конечных подмножеств.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Phi = M_0 + \mathbf{W}$ плоскость в пространстве \mathcal{A} и $M_0, \dots, M_s \in \Phi$. Если $M = \lambda_0 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$, $\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$, – бариецентр точек

M_1, \dots, M_s , то $\overline{M_0M} = \sum_{i=1}^s \lambda_i \overline{M_0M_i} \in \mathbf{W}$, т. е. $M \in \Phi$.

Достаточность. Пусть Φ содержит бариецентры всех своих конечных подмножеств. Чтобы доказать, что Φ – плоскость, достаточно показать, что Φ содержит свою аффинную оболочку $\text{Aff}(\Phi)$. Пусть $M \in \text{Aff}(\Phi)$, т. е. $\overline{M_0M} = \sum_{i=1}^s \lambda_i \overline{M_0M_i}$ для некоторых $M_0, \dots, M_s \in \Phi$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbf{F}$. Тогда

$$\overline{M_0M} = \left(1 - \sum_{i=1}^s \lambda_i\right) \overline{M_0M_0} + \sum_{i=1}^s \lambda_i \overline{M_0M_i}.$$

¹ Впервые бариецентрические координаты возникли у А. Мебиуса (1827 г.) в связи с задачами о центре тяжести масс. Бариецентрические линейные комбинации точек и бариецентрические координаты широко используются в теоретической механике, алгебраической топологии и других областях математики.

Последняя запись означает, что $M = \lambda_0 M_0 + \dots + \lambda_s M_s$, $\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$, т. е. M является барицентром точек $M_0, \dots, M_s \in \Phi$. По условию $M \in \Phi$. ◀

§ 6.8. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ И СИМПЛЕКСЫ В ВЕЩЕСТВЕННЫХ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ

В этом параграфе \mathcal{A}^n обозначает n -мерное аффинное пространство над полем вещественных чисел \mathbf{R} . В таких пространствах можно определить фигуры, которые обобщают на многомерный случай некоторые важные типы фигур, известные из элементарной геометрии.

Пусть A и B – две точки пространства \mathcal{A}^n . Если зафиксировать репер $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ в пространстве \mathcal{A}^n , то прямую Δ , проходящую через $A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $B(\beta_1, \dots, \beta_n)$, в данной системе координат можно задать параметрически:

$$\Delta = \{M(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)t; i = 1, \dots, n\}. \quad (6.8.1)$$

В формулах (6.8.1) параметр пробегает множество всех вещественных чисел: $t \in \mathbf{R}$. При $t = 0$ получаем точку A , при $t = 1$ – точку B . Если ограничить область изменения параметра отрезком $[0; 1]$, то получим **отрезок**¹ AB с концами A и B :

$$AB = \{M(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)t; t \in [0; 1], i = 1, \dots, n\}.$$

При $t = \frac{1}{2}$ получим точку C , являющуюся **серединой отрезка** AB , т. е. такую, что $\overline{AC} = \overline{CB}$. Если $t \in [0; +\infty)$, то формулы (6.8.1) задают **луч с вершиной** A , проходящий через точку B .

Равенство $x_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)t$ из формул (6.8.1) перепишем в виде $x_i = (1-t)\alpha_i + t\beta_i$ и обозначим $\lambda = (1-t)$, $\mu = t$. Тогда множество точек прямой Δ имеет координаты $x_i = \lambda\alpha_i + \mu\beta_i$; $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda + \mu = 1$. Это означает, что *прямая Δ совпадает с множеством точек, являющихся всевозможными барицентрическими линейными комбинациями точек A и B :*

$$\Delta = \{M = \lambda A + \mu B \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \lambda + \mu = 1\}.$$

Такое задание прямой уже не зависит от выбора системы координат. Отрезок задается при условии, что $\lambda, \mu \geq 0$:

$$AB = \{M = \lambda A + \mu B \mid \lambda + \mu = 1; \lambda, \mu \geq 0\}.$$

Чтобы получить луч с вершиной A , проходящий через точку B , надо потребовать, чтобы μ было неотрицательно.

¹ Понятие *отрезка* в вещественном аффинном пространстве отличается от такого же понятия в случае аффинного пространства общего типа (§ 6.6). Здесь отрезок – это не только пара точек, являющихся его концами, но и множество точек, лежащих *между* ними.

Определение 6.8.1. *n -Мерным параллелепипедом в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n называется фигура P^n , состоящая из всех точек с координатами в некотором аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, изменяющимися от 0 до 1:*

$$P^n = \{M(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Будем говорить, что параллелепипед, определенный выше, связан с репером $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Одномерный параллелепипед P^1 на прямой \mathbf{E}^1 – это отрезок, двумерный параллелепипед P^2 на плоскости \mathbf{E}^2 – это параллелограмм, трехмерный параллелепипед P^3 в пространстве \mathbf{E}^3 – это параллелепипед в смысле элементарной геометрии (рис. 6.8.1, а, б, в).

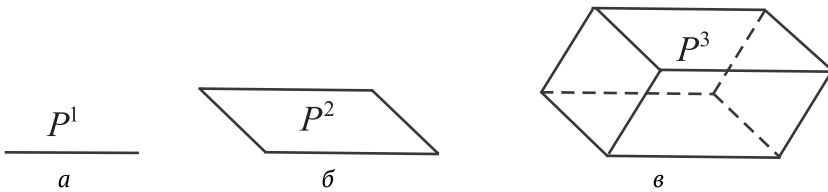


Рис. 6.8.1

Для n -мерного параллелепипеда P^n по аналогии с малыми размерностями определяются *вершины*, *ребра*, *грани* и *диагонали*. **Вершины** – это точки $A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, координаты которых ϵ_i принимают значения либо 0 либо 1. Для каждой вершины $A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ **противоположной вершиной** называется вершина $B(1-\epsilon_1, \dots, 1-\epsilon_n)$. В частности, начало координат $O(0, \dots, 0)$ является вершиной параллелепипеда P^n , противоположная для нее вершина – точка $C(1, \dots, 1)$. **Ребро** параллелепипеда составляют точки вида $M(\epsilon_1, \dots, x_i, \dots, \epsilon_n)$, $0 \leq x_i \leq 1$, все координаты которых, кроме одной (с некоторым номером i), фиксированы и равны либо 0, либо 1, а i -я координата принимает все значения от 0 до 1. Вершины и ребра – это примеры *граней* параллелепипеда, 0-мерных и 1-мерных соответственно. Пусть k – целое число, $0 \leq k \leq n$. Все точки параллелепипеда, у которых зафиксированы значения $n - k$ координат (равные либо 0, либо 1), а оставшиеся k изменяются от 0 до 1, составляют *k -мерную грань*. Очевидно, что k -мерная грань параллелепипеда является k -мерным параллелепипедом в соответствующей k -мерной плоскости. В качестве упражнения докажете, что у параллелепипеда P^n имеются $2^{n-k} C_n^k$ k -мерных граней. **Диагональ** параллелепипеда – это отрезок с концами в противоположных вершинах. Точка $M_0\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ является центром параллелепипеда P^n .

Определение 6.8.2. Пусть A_0, A_1, \dots, A_k – $k+1$ аффинно независимых точек в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n . **k -Мерным симплексом в пространстве \mathcal{A}^n с вершинами A_0, A_1, \dots, A_k** называется фигура σ_k , состоящая из всех барицентрических комбинаций данных точек с неотрицательными коэффициентами:

$$\sigma_k = \{\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}.$$

Из определения следует, что нульмерный симплекс $\sigma_0 = \{A_0\}$ – это точка, одномерный симплекс $\sigma_1 = \{\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 \mid \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \lambda_0, \lambda_1 \geq 0\}$ – это отрезок с концами A_0, A_1 (рис. 6.8.2, а, б).

Двумерный симплекс

$$\sigma_2 = \{\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \mid \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

на плоскости \mathbf{E}^2 – это треугольник с вершинами A_0, A_1, A_2 (рис. 6.8.2, в), поскольку в аффинном репере $(A_0, \overline{A_0 A_1}, \overline{A_0 A_2})$ симплекс σ_2 задается системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Для симплекса σ_2 в любом аффинном пространстве \mathcal{A}^n сохраняется название *треугольник*. Нетрудно видеть, что трехмерный симплекс σ_3 в пространстве \mathbf{E}^3 – это тетраэдр (треугольная пирамида) с вершинами A_0, A_1, A_2, A_3 (рис. 6.8.2, г).

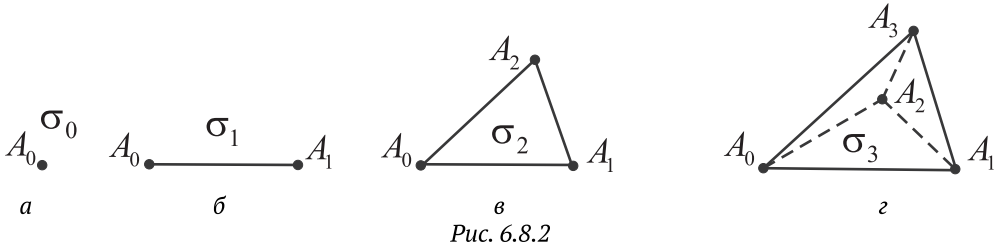


Рис. 6.8.2

Рассмотрим в арифметическом $(n+1)$ -мерном аффинном пространстве строк \mathbf{R}^{n+1} набор из $n+1$ точек:

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_{n+1} = (0, \dots, 0, 1).$$

Очевидно, что эти точки аффинно независимы и поэтому они определяют n -мерный симплекс:

$$\sigma_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq 0\}.$$

Этот симплекс обычно называют *стандартным представлением* n -мерного симплекса.

Если у n -мерного симплекса σ_n с вершинами A_0, A_1, \dots, A_n выбрать $k+1$ вершин $A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, $0 \leq k \leq n$, то они аффинно независимы и, следовательно, определяют k -мерный симплекс $\sigma_k = \sigma_k(A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$, который называется *k -мерной гранью* симплекса σ_n . Оставшиеся $(n-k)$ вершин определяют $(n-k-1)$ -мерный симплекс, который называется *противоположной гранью* для грани $\sigma_k(A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$.

Центром n -мерного симплекса σ_n с вершинами A_0, A_1, \dots, A_n называют точку

$$C = \frac{1}{n+1} A_0 + \frac{1}{n+1} A_1 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n.$$

Данный n -мерный симплекс σ_n с вершинами A_0, A_1, \dots, A_n можно естественным образом расширить до n -мерного параллелепипеда P^n , который в аффинном репере $(A_0, \overline{A_0 A_1}, \dots, \overline{A_0 A_n})$ задается системой неравенств $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Точки

симплекса σ_n выделяются среди точек параллелепипеда P^n дополнительным условием $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$. Выбирая аналогично другие аффинные реперы с началами в вершинах $A_i, i = 1, \dots, n$, получим еще n параллелепипедов, являющихся расширениями симплекса σ_n (для $n = 2$ рис. 6.8.3).

Симплексы являются важнейшими примерами *выпуклых фигур*, которые определяются следующим образом.

Определение 6.8.3. Фигура Φ в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n называется **выпуклой**, если для любых точек $A, B \in \Phi$ отрезок AB с концами A и B содержится в фигуре Φ .

Из определения вытекает, что пустое множество \emptyset – выпуклая фигура и что пересечение любого семейства выпуклых фигур – выпуклая фигура. Любая плоскость – выпуклая фигура, поскольку вместе с любыми двумя точками плоскость содержит прямую, проходящую через эти точки.

Утверждение 6.8.1. Для любого $k = 0, 1, \dots$ симплекс σ_k является выпуклой фигурой.

Доказательство. Пусть A_0, A_1, \dots, A_k – вершины симплекса σ_k ;

$A = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_k A_k, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$; $B = \mu_0 A_0 + \dots + \mu_k A_k, \sum_{i=0}^k \mu_i = 1, \mu_i \geq 0$, – произвольные точки симплекса σ_k ; $M = \alpha A + \beta B, \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0$, – произвольная точка отрезка AB . Тогда

$$M = \alpha(\lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_k A_k) + \beta(\mu_0 A_0 + \dots + \mu_k A_k) = v_0 A_0 + \dots + v_k A_k,$$

где $v_i = \alpha \lambda_i + \beta \mu_i, i = 0, \dots, k$. Очевидно, что все числа v_i неотрицательны и

$$\sum_{i=0}^k v_i = \alpha \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \right) + \beta \left(\sum_{i=0}^k \mu_i \right) = \alpha + \beta = 1. \text{ Следовательно, } M \in \sigma_k, \text{ т. е. } AB \subset \sigma_k. \blacktriangleright$$

Рассмотрим фигуры в аффинном пространстве \mathcal{A}^n , которые задаются в некотором аффинном репере линейными неравенствами (строгими или нестрогими):

$$\Phi = \{M(x_1, \dots, x_n) \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta > 0\}, \quad (6.8.2)$$

$$\Psi = \{M(x_1, \dots, x_n) \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta \geq 0\}. \quad (6.8.3)$$

Здесь α_i и β – вещественные числа и среди чисел α_i есть ненулевые. По аналогии с E^2 и E^3 фигуру Φ будем называть **открытым полупространством**, а фигуру Ψ – **замкнутым полупространством** аффинного пространства \mathcal{A}^n , определяемыми гиперплоскостью с уравнением $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta = 0$.

Утверждение 6.8.2. Любое полупространство является выпуклой фигурой.

Доказательство. Пусть $A(x_1^0, \dots, x_n^0), B(y_1^0, \dots, y_n^0)$ – две точки открытого полупространства, которое задается неравенством (2); $M = \lambda A + \mu B, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$, – произвольная точка отрезка AB . Подставим координаты точки $M(\lambda x_1^0 + \mu y_1^0, \dots, \lambda x_n^0 + \mu y_n^0)$ в левую часть неравенства (6.8.2):

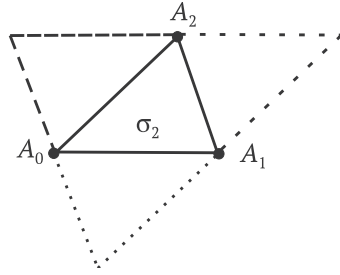


Рис. 6.8.3

$$\begin{aligned} & \alpha_1(\lambda x_1^0 + \mu y_1^0) + \dots + \alpha_n(\lambda x_n^0 + \mu y_n^0) + \beta = \\ & = \lambda(\alpha_1 x_1^0 + \dots + \alpha_n x_n^0 + \beta) + \mu(\alpha_1 y_1^0 + \dots + \alpha_n y_n^0 + \beta). \end{aligned}$$

Полученное число положительно, так как это линейная комбинация двух положительных чисел с неотрицательными коэффициентами, сумма которых равна 1. Следовательно, $M \in \Phi$, т. е. $AB \subset \Phi$. Для замкнутого полупространства доказательство аналогично. ►

Следствие 6.8.1. *Фигура в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n , которая в некотором аффинном репере задается системой линейных уравнений или неравенств с n неизвестными, является выпуклой фигурой.*

Это утверждение используется в задачах линейного программирования, где рассматриваются системы, составленные из линейных неравенств вида (6.8.2) или (6.8.3) и линейных уравнений с n неизвестными.

Пусть Φ – произвольная фигура в аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Существуют выпуклые множества, содержащие Φ , например, все пространство \mathcal{A}^n . Следовательно, существует и пересечение всех таких множеств.

Определение 6.8.4. *Пересечение семейства всех выпуклых множеств, содержащих фигуру Φ , называется **выпуклой оболочкой** Φ и обозначается $\text{conv}(\Phi)$.*

Очевидно, что выпуклая оболочка фигуры Φ – это наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее Φ .

Утверждение 6.8.3. *Выпуклая оболочка непустой фигуры Φ совпадает с множеством всевозможных барицентрических линейных комбинаций точек фигуры Φ с неотрицательными коэффициентами (такие линейные комбинации будем называть **выпуклыми** линейными комбинациями):*

$$\text{conv}(\Phi) = \left\{ A = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_k A_k \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0; A_i \in \Phi; k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Доказательство. Обозначим символом $\hat{\Phi}$ множество всех выпуклых линейных комбинаций точек фигуры Φ . При $k = 0$ получаем точки фигуры Φ , следовательно, $\Phi \subset \hat{\Phi}$.

Покажем, что множество $\hat{\Phi}$ выпуклое. Пусть $A = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_k A_k$ и $B = \mu_0 B_0 + \dots + \mu_l B_l$ – две точки множества $\hat{\Phi}$. Тогда любую точку $M = \alpha A + \beta B$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, отрезка AB можно представить в виде

$$\begin{aligned} M &= \alpha(\lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_k A_k) + \beta(\mu_0 B_0 + \dots + \mu_l B_l) = \\ &= (\alpha\lambda_0)A_0 + \dots + (\alpha\lambda_k)A_k + (\beta\mu_0)B_0 + \dots + (\beta\mu_l)B_l. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha\lambda_i, \beta\mu_i \geq 0$ и

$$\begin{aligned} & \alpha\lambda_0 + \dots + \alpha\lambda_k + \beta\mu_0 + \dots + \beta\mu_l = \\ & = \alpha(\lambda_0 + \dots + \lambda_k) + \beta(\mu_0 + \dots + \mu_l) = \alpha + \beta = 1, \end{aligned}$$

то M есть выпуклая линейная комбинация точек $A_0, \dots, A_k, B_0, \dots, B_l$. Итак, множество $\hat{\Phi}$ вместе с двумя точками содержит отрезок с концами в этих точках, т. е. является выпуклым множеством. Тем самым доказано, что $\text{conv}(\Phi) \subset \hat{\Phi}$.

Теперь докажем обратное включение $\hat{\Phi} \subset \text{conv}(\Phi)$. Пусть Σ – произвольное выпуклое множество. Покажем, что Σ содержит все выпуклые линейные комбинации своих точек. Применим метод математической индукции. При $k = 0$ выпуклые линейные комбинации дают точки множества Σ , следовательно, есть база индукции. Пусть Σ содержит все выпуклые линейные комбинации k своих точек. Тогда выпуклая линейная комбинация $k + 1$ точек множества Σ с ненулевыми коэффициентами представляется в виде

$$A = \lambda_0 A_0 + (1 - \lambda_0) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} A_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_0} A_k \right) = \lambda_0 A_0 + (1 - \lambda_0) B.$$

Точка $B = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} A_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_0} A_k$ есть выпуклая линейная комбинация k точек множества Σ и по предположению индукции принадлежит множеству Σ . Точка A есть точка отрезка $A_0 B$, и поскольку Σ – выпуклое множество, то $A \in \Sigma$.

Таким образом, множество $\hat{\Phi}$ выпукло и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем Φ , т. е. $\text{conv}(\Phi) = \hat{\Phi}$. ►

§ 6.9. ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВЕЩЕСТВЕННЫХ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этом параграфе, как и в предыдущем, \mathcal{A}^n обозначает n -мерное аффинное пространство над полем вещественных чисел \mathbf{R} . В пространстве \mathcal{A}^n по аналогии с \mathbf{E}^2 и \mathbf{E}^3 (см. § 3.2 и § 3.5) можно определить фигуры второго порядка.

Определение 6.9.1. Фигура Φ в пространстве \mathcal{A}^n называется **фигурой второго порядка**, если в некотором аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ она может быть задана алгебраическим уравнением второй степени с n неизвестными:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n a_k x_k + a = 0. \quad (6.9.1)$$

В уравнении (6.9.1) a_{ij}, a_k, a – фиксированные вещественные числа, x_1, \dots, x_n – неизвестные. Поскольку (6.9.1) – уравнение второй степени, то матрица $A = (a_{ij})$ коэффициентов квадратичной части уравнения ненулевая. Кроме того, можно считать, что в уравнении (6.9.1) $a_{ij} = a_{ji}$, т. е. матрица A симметрическая: $A^t = A$. Действительно, при подстановке в сумму $a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_i x_j$ любых значений неизвестных $x_i = \alpha_i, x_j = \alpha_j, \alpha_i, \alpha_j \in \mathbf{R}$ имеем

$$a_{ij} \alpha_i \alpha_j + a_{ji} \alpha_j \alpha_i = (a_{ij} + a_{ji}) \alpha_i \alpha_j = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \alpha_i \alpha_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \alpha_j \alpha_i.$$

Это означает, что если заменить в уравнении (6.9.1) коэффициенты a_{ij} и a_{ji} одним числом $\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, то новое уравнение будет задавать ту же фигуру, что и исходное уравнение (6.9.1).

Наша цель – провести аффинную классификацию фигур второго порядка в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Прежде всего, отметим (см. теорему 6.4.1), что при переходе от репера $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к другому реперу $(O, \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ с формулами преобразования координат

$$(x) = S(x') + (\alpha) \quad (6.9.2)$$

уравнение фигуры Φ сохраняет вид (6.9.1), причем матрица квадратичной части изменяется по правилу

$$A' = S^t A S. \quad (6.9.3)$$

Здесь S – матрица перехода от базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к базису $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$, т. е. невырожденная квадратная матрица порядка n . С алгебраической точки зрения формула (6.9.3) выражает закон изменения матрицы квадратичной

формы $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ при линейной невырожденной замене переменных $(x) = S(x')$. В курсе линейной алгебры доказывается, что существует невырожденная матрица S , такая, что $S^t A S = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p \text{ раз}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q \text{ раз}}, 0, \dots, 0)$. При этом числа p (количество -1) и q (количество 1) определяются однозначно и не зависят от выбора матрицы S (см. [2, теорема 22.2 – закон инерции вещественных квадратичных форм]). Отметим, что число $r = p + q$, равное рангу матрицы A , также определяется однозначно.

Так как любая невырожденная матрица может служить матрицей перехода от данного базиса к некоторому другому, то этот алгебраический результат в аналитической геометрии можно интерпретировать следующим образом.

Для любой фигуры второго порядка Φ в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n существует аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, в котором Φ имеет уравнение

$$-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_r^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k x_k + a = 0, \quad p + q = r, \quad 0 < r \leq n. \quad (6.9.4)$$

Итак, считаем, что фигура Φ задана уравнением (6.9.4). Произведем параллельный перенос репера $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ согласно следующим формулам:

$$\begin{cases} x'_i = x_i - a_i, & i = 1, \dots, p; \\ x'_i = x_i + a_i, & i = p+1, \dots, r; \\ x'_i = x_i, & i = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

В новом репере уравнение фигуры Φ имеет вид

$$-x_1'^2 - \dots - x_p'^2 + x_{p+1}'^2 + \dots + x_r'^2 + 2 \sum_{k=r+1}^n a_k x'_k + a' = 0, \quad p + q = r, \quad 0 < r \leq n. \quad (6.9.5)$$

Рассмотрим несколько возможных вариантов для чисел a_{r+1}, \dots, a_n, a' .

I. Пусть в уравнении (6.9.5) $a_{r+1} = \dots = a_n = a' = 0$. Тогда это уравнение имеет вид $-x_1'^2 - \dots - x_p'^2 + x_{p+1}'^2 + \dots + x_r'^2 = 0$. Умножая, если надо, последнее равенство на -1 и перенумеровывая базисные векторы репера, можно считать, что $p \leq \frac{r}{2}$.

II. Пусть в уравнении (6.9.5) $a_{r+1} = \dots = a_n = 0, a' < 0$. Перенесем a' в правую часть, разделим обе части уравнения на $-a'$ и вновь перейдем к другому реперу согласно следующим формулам преобразования координат:

$$\begin{cases} X_i = \frac{x'_i}{\sqrt{-a'}}, & i = 1, \dots, r; \\ X_i = x'_i, & i = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

В последнем репере уравнение фигуры Φ имеет вид

$$-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_r^2 = 1, \quad 0 < r \leq n, 0 \leq p \leq r. \quad (6.9.6)$$

Если в уравнении (6.9.5) $a_{r+1} = \dots = a_n = 0, a' > 0$, то, проделав аналогичные преобразования и перенумеровав базисные векторы репера, вновь получим уравнение вида (6.9.6).

III. Пусть в уравнении (6.9.5) среди коэффициентов a_{r+1}, \dots, a_n есть ненулевые и допустим, что $a_{r+1} \neq 0$. Применим следующее преобразование координат:

$$\begin{cases} X_{r+1} = -\left(\sum_{k=r+1}^n a_k x'_k + \frac{a'}{2}\right), \\ X_i = x'_i, & i \neq r+1. \end{cases}$$

Получим уравнение

$$-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_r^2 = 2X_{r+1}, \quad 0 < r \leq n-1.$$

Можно считать, что $p \leq \frac{r}{2}$ в последнем уравнении. Если это не так, то умножим последнее уравнение на -1 , перенумеруем базисные векторы репера и заменим вектор с номером $r+1$ на противоположный.

Подведем итог наших рассуждений.

Теорема 6.9.1. Для любой фигуры второго порядка Φ в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n существует репер, в котором Φ имеет уравнение одного из следующих видов:

$$-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_r^2 = 1, \quad 0 < r \leq n, 0 \leq p \leq r;$$

$$-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_r^2 = 0, \quad 0 < r \leq n, 0 \leq p \leq \frac{r}{2}; \quad (6.9.7)$$

$$-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_r^2 = 2X_{r+1}, \quad 0 < r \leq n-1, 0 \leq p \leq \frac{r}{2}. \quad (6.9.8)$$

Уравнения (6.9.6)–(6.9.8) называются **нормальными уравнениями** фигур второго порядка.

Будем для краткости фигуры с нормальными уравнениями вида (6.9.6), (6.9.7), (6.9.8) называть фигурами *первого, второго и третьего типов* соответственно.

Дадим названия фигурам с уравнениями (6.9.6)–(6.9.8). Рассмотрим сначала уравнения с максимально возможным рангом. Фигура Φ с уравнени-

ем $X_1^2 + \dots + X_n^2 = 1$ называется **эллипсоидом** в n -мерном пространстве \mathcal{A}^n . Фигура Φ с уравнением $-X_1^2 - \dots - X_n^2 = 1$ называется **мнимым эллипсоидом** в пространстве \mathcal{A}^n . Если в левой части уравнения $-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_n^2 = 1$ есть и положительные, и отрицательные слагаемые, т. е. $0 < p < n$, то фигура Φ называется **гиперболоидом** в пространстве \mathcal{A}^n . Фигура Φ с уравнением $-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_n^2 = 0$ при условии, что $0 < p \leq \frac{n}{2}$, называется **конусом второго порядка** в n -мерном пространстве \mathcal{A}^n . Фигура Φ с уравнением $X_1^2 + \dots + X_n^2 = 0$ называется **мнимым конусом второго порядка**. Фигура Φ с уравнением $X_1^2 + \dots + X_{n-1}^2 = 2X_n$ называется **эллиптическим параболоидом**, фигура Φ с уравнением $-X_1^2 - \dots - X_p^2 + X_{p+1}^2 + \dots + X_{n-1}^2 = 2X_n$, $0 < p \leq \frac{n-1}{2}$, называется **гиперболическим параболоидом** в n -мерном пространстве \mathcal{A}^n .

Пусть теперь фигура Φ в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ имеет уравнение вида (6.9.6) или (6.9.7), в котором ранг не максимальный, т. е. число $k = n - r$ положительно. Тогда очевидно, что Φ обладает следующим свойством: *вместе с любой точкой $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, принадлежащей фигуре Φ , эта фигура содержит k -мерную плоскость $M_0 + L(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_{r+k})$.*

По аналогии с трехмерным случаем такую фигуру называют **цилиндрической фигурой кратности k** . Эта цилиндрическая фигура имеет **базу Φ'** , которая определяется следующим образом. Рассмотрим r -мерную координатную плоскость $\pi' = O + L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$. В этой плоскости соответствующее уравнение задает фигуру второго порядка Φ' с максимальным значением ранга, т. е. либо эллипсоид, либо гиперболоид, либо конус второго порядка в аффинном пространстве π' . Сама фигура Φ есть объединение семейства k -мерных параллельных плоскостей вида $M + L(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_{r+k})$, где точка M «пробегает» базу Φ' . Таким образом, коротко фигуру Φ можно назвать **k -кратным цилиндром** над эллипсоидом, гиперболоидом или конусом второго порядка Φ' . Аналогично в случае уравнений вида (6.9.8) получаем кратный цилиндр над соответствующим параболоидом.

Можно сказать, что основными, «базисными», фигурами второго порядка в аффинном пространстве \mathcal{A}^n являются эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды и конусы второго порядка. Любая другая фигура второго порядка получается достаточно простой операцией «надстраивания» цилиндра некоторой кратности над базисной фигурой в подпространстве пространства \mathcal{A}^n .

Пусть

$$(x) = S(X) + (\alpha) - \quad (6.9.9)$$

формулы преобразования координат при переходе от исходного репера $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к реперу, в котором фигура второго порядка Φ имеет нормальное уравнение. Формулы (6.9.9) можно интерпретировать так же, как формулы аффинного преобразования пространства $f: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n$, при котором точка $M(x_1, \dots, x_n)$ переходит в точку $M'(X_1, \dots, X_n)$. С этой точки зрения теорема 6.9.1 переформулируется следующим образом.

Теорема 6.9.2. Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – репер в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Любая фигура второго порядка Φ в пространстве \mathcal{A}^n аффинно эквивалентна

на фигуре Φ' , которая в данном репере имеет одно из нормальных уравнений (6.9.6) – (6.9.8).

Далее при проведении аффинной классификации фигур второго порядка в вещественном аффинном пространстве мы добавим к точкам вещественного пространства \mathcal{A}^n дополнительно так называемые *мнимые* точки. Это расширение пространства \mathcal{A}^n позволит далее определить понятие *обобщенного центра* фигуры второго порядка, которое используется при аффинной классификации. Будет показано, что эта характеристика сохраняется при аффинных преобразованиях, т. е. относится к аффинной геометрии. Следовательно, если две фигуры второго порядка различаются своими обобщенными центрами, то они не могут быть аффинно эквивалентными.

Добавление мнимых точек к точкам вещественного аффинного пространства происходит следующим образом. Зафиксируем репер $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Мы знаем, что каждая точка пространства M имеет в этом репере координаты – набор из n вещественных чисел (x_1, \dots, x_n) , причем соответствие $M(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ есть биекция множества \mathcal{A}^n на множество \mathbf{R}^n . Если допустить, что координаты могут быть не только вещественными, но и комплексными, то к точкам пространства \mathcal{A}^n добавляются новые, которые имеют вид $A(z_1, \dots, z_n)$, где z_1, \dots, z_n – комплексные числа, не все из которых вещественные. Такие объекты назовем *мнимыми точками* пространства \mathcal{A}^n , а точки самого пространства \mathcal{A}^n – *действительными*. Будем считать, как и ранее, что пара точек $A(z_1, \dots, z_n), B(w_1, \dots, w_n)$, действительных или мнимых, определяет отрезок с концами A и B . *Серединой отрезка* назовем точку $C\left(\frac{z_1 + w_1}{2}, \dots, \frac{z_n + w_n}{2}\right)$. Отме-

тим, что середина отрезка с мнимыми концами может быть действительной точкой, для этого z_i и w_i могут быть, например, комплексно сопряженными числами.

Убедимся, что это более общее понятие середины отрезка относится к аффинной геометрии, т. е. сохраняется при аффинных преобразованиях. Пусть $f: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n$ – аффинное преобразование пространства \mathcal{A}^n , которое задается в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ формулами

$$\begin{cases} x'_1 = t_{11}x_1 + \dots + t_{1n}x_n + \beta_1, \\ x'_2 = t_{21}x_1 + \dots + t_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots \\ x'_m = t_{m1}x_1 + \dots + t_{mn}x_n + \beta_m, \end{cases} \quad t_{ij}, \beta_i \in \mathbf{R}. \quad (6.9.10)$$

Будем считать, что согласно этим формулами f действует не только на действительные, но и на мнимые точки. Пусть C – середина отрезка с концами A и B . Тогда ее координатный столбец (c) есть полусумма координатных столбцов точек A и B :

$(c) = \frac{(z) + (w)}{2}$. В соответствии с формулами (6.9.10), координатные столбцы точек $f(A), f(B), f(C)$ имеют вид

$$(z') = T(z) + (\beta), \quad (w') = T(w) + (\beta), \quad (c') = T(c) + (\beta).$$

Здесь $T = (t_{ij})$. Следовательно,

$$\frac{(z') + (w')}{2} = \frac{T(z) + (\beta) + T(w) + (\beta)}{2} = T \frac{(z) + (w)}{2} + (\beta) = (c'),$$

т. е. точка $f(C)$ – середина отрезка с концами $f(A)$ и $f(B)$.

Пусть фигура второго порядка Φ задана в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ алгебраическим уравнением второй степени с n неизвестными. Решениями этого уравнения могут быть наборы комплексных чисел, следовательно, фигура Φ пополняется мнимыми точками. Мнимые точки добавляются и к любой прямой. Если прямая задана параметрически:

$$x_i = b_i + c_i t, i \in \{1, \dots, n\}, b_i, c_i \in \mathbf{R},$$

то действительные точки этой прямой получаются при вещественных значениях параметра t , а мнимые – при условии, что $t \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Определение 6.9.2. Действительная точка C называется **обобщенным центром** фигуры Φ , если для любой точки M (действительной или мнимой), принадлежащей фигуре Φ , существует такая точка M' фигуры Φ , что C – середина отрезка с концами M и M' .

Мы используем термин «обобщенный центр», поскольку любой центр фигуры в соответствии с определением 6.6.5 является центром в обобщенном смысле. Так как любое аффинное преобразование действительные точки переводит в действительные и сохраняет середины отрезков, то понятие обобщенного центра фигуры относится к аффинной геометрии. Отметим также, что если $B(b_1, \dots, b_n)$ – середина отрезка с мнимыми концами $M(b_1 + ic_1, \dots, b_n + ic_n)$ и $M'(b_1 - ic_1, \dots, b_n - ic_n)$, то B, M и M' – три точки прямой с начальной точкой $B(b_1, \dots, b_n)$ и направляющим вектором $\vec{a}(c_1, \dots, c_n)$.

Далее мы найдем обобщенные центры фигур второго порядка. Для решения этой задачи нам нужно выяснить, каким может быть пересечение фигуры второго порядка Φ , заданной уравнением (6.9.1), и произвольной прямой. Пусть прямая Δ с начальной точкой $M_0(b_1, \dots, b_n)$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ и направляющим вектором $\vec{c}(c_1, \dots, c_n)$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ задана параметрически:

$$x_i = b_i + c_i t, i \in \{1, \dots, n\}, t \in \mathbf{C}.$$

Координаты точек пересечения удовлетворяют уравнению относительно неизвестной t :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(b_i + c_i t)(b_j + c_j t) + 2 \sum_{k=1}^n a_k(b_k + c_k t) + a = 0. \quad (6.9.11)$$

Левая часть этого уравнения есть квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами относительно t :

$$\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_i c_j \right) t^2 + 2pt + q, \quad (6.9.12)$$

$$\text{где } p = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_i c_j + \sum_{k=1}^n a_k c_k, \quad q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_i b_j + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + a.$$

Если старший коэффициент уравнения (6.9.11), равный $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}c_i c_j$, отличен от нуля, то уравнение (6.9.11) – квадратное, и в зависимости от его дискриминанта у него могут быть следующие возможности:

1) уравнение (6.9.11) имеет 2 различных вещественных корня: t_1 и t_2 . Это означает, что прямая Δ пересекает фигуру Φ в двух действительных точках: $M_1(b_1 + c_1 t_1, \dots, b_n + c_n t_1)$ и $M_2(b_1 + c_1 t_2, \dots, b_n + c_n t_2)$;

2) уравнение (6.9.11) имеет один (двукратный) вещественный корень t_0 . Это означает, что прямая Δ пересекает фигуру Φ в одной (двойной) действительной точке $M_0(b_1 + c_1 t_0, \dots, b_n + c_n t_0)$;

3) уравнение (6.9.11) имеет 2 различных комплексных корня t_1 и t_2 , числа t_1 и t_2 комплексно сопряжены. В этом случае прямая Δ пересекает фигуру Φ в двух мнимых точках: $M_1(b_1 + c_1 t_1, \dots, b_n + c_n t_1)$ и $M_2(b_1 + c_1 t_2, \dots, b_n + c_n t_2)$.

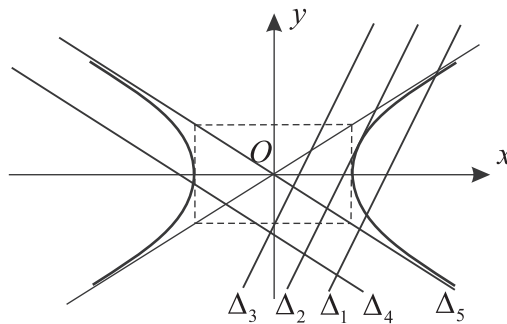
Если же $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}c_i c_j = 0$, то возможны еще три варианта.

4) Если $p \neq 0$, то уравнение (6.9.11) – линейное, имеющее один вещественный корень $t_0 = -\frac{q}{p}$, следовательно, прямая Δ пересекает фигуру Φ в одной (простой) вещественной точке $M_0(b_1 + c_1 t_0, \dots, b_n + c_n t_0)$.

5) Если $p = 0, q \neq 0$, то уравнение (6.9.11) не имеет решений, следовательно, прямая Δ не пересекает фигуру Φ .

6) Если $p = 0, q = 0$, то уравнение (6.9.11) является тождеством, т. е. любое число t есть корень, следовательно, прямая Δ целиком лежит в фигуре Φ .

На рисунке изображена гипербола и пять прямых, иллюстрирующих все варианты, кроме последнего, номер прямой соответствует тому порядку, в котором выше перечислены типы возможных пересечений. Реализуется также вариант, когда прямая целиком лежит в фигуре, для этого в качестве фигуры Φ можно взять, например, пару пересекающихся или пару параллельных прямых на плоскости.



Отметим, что число $d = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}c_i c_j$, которое получается при подстановке координат вектора $\vec{c}(c_1, \dots, c_n)$ в квадратичную часть уравнения (6.9.1), не изменяется при замене репера. Действительно, в матричном виде число d вычисляется так: $d = (c)^t A(c)$. Здесь (c) – координатный столбец вектора \vec{c} . Если $(O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ – дру-

гой репер и S – матрица перехода от базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к базису $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$, то матрица A и столбец (c) изменяются по формулам $A' = S^t A S$, $(c) = S(c')$. Следовательно,

$$(c')^t A' (c') = (S^{-1}(c))^t \cdot (S^t A S) \cdot (S^{-1}(c)) = (c)^t (S^t)^{-1} S^t A S S^{-1}(c) = (c)^t A (c).$$

Это замечание обеспечивает корректность следующего определения.

Определение 6.9.3. Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – репер в аффинном пространстве A^n . Вектор $\vec{c}(c_1, \dots, c_n)$ называется **вектором асимптотического направления** относительно фигуры второго порядка Φ , заданной в данном репере уравнением (6.9.11),

если верно равенство $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_i c_j = 0$.

Утверждение 6.9.1. Для любой фигуры Φ второго порядка в аффинном пространстве A^n существует n линейно независимых векторов, имеющих неасимптотические направления относительно Φ .

Доказательство. Как доказано выше, любая фигура Φ второго порядка в некотором репере имеет одно из уравнений (6.9.6)–(6.9.8). Тогда, очевидно, искомые векторы следующие:

$$\begin{aligned} & \vec{a}_1(1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{a}_r(\underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{r \text{ мест}}), \\ & \vec{a}_{r+1}(\underbrace{1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{r \text{ мест}}), \dots, \vec{a}_n(1, 0, \dots, 0, 1). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Перейдем теперь к нахождению центров (в обобщенном смысле) фигур второго порядка. Пусть $M_0(b_1, \dots, b_n)$ – искомый центр, $\vec{c}(c_1, \dots, c_n)$ – вектор неасимптотического направления, $x_i = b_i + c_i t$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i, c_i \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{C}$, – уравнения прямой с направляющим вектором \vec{c} , проходящей через точку M_0 . В таком случае, как отмечено выше, прямая пересекает фигуру Φ , заданную уравнением (6.9.1), либо в двух точках (действительных или мнимых), либо в одной (двойной) точке. Эти точки соответствуют либо двум значениям параметра t_1 и t_2 (вещественным или комплексно сопряженным), либо одному значению t_0 ; числа t_1, t_2, t_0 – корни квадратного трехчлена (6.9.12). Поскольку $M_0(b_1, \dots, b_n)$ – центр фигуры Φ , то в первых двух случаях имеем

$$b_i = \frac{(b_i + c_i t_1) + (b_i + c_i t_2)}{2} = b_i + c_i \frac{t_1 + t_2}{2}, i \in \{1, \dots, n\},$$

т. е. $t_1 + t_2 = 0$. В третьем случае $t_0 = 0$ – двойной корень трехчлена (6.9.12). Следовательно, в рассматриваемой ситуации коэффициент при t трехчлена (6.9.12)

(т. е. число $p = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_i c_j + \sum_{k=1}^n a_k c_k$) равен нулю. Это означает, что числа c_1, \dots, c_n являются решениями следующего линейного однородного уравнения с неизвестными x_1, \dots, x_n :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} b_i + a_1 \right) x_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n a_{in} b_i + a_n \right) x_n = 0.$$

Согласно утверждению 6.9.1, это уравнение имеет n линейно независимых решений, значит, ранг матрицы этого уравнения равен нулю, т. е. верны равенства

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}b_i + a_1 = 0, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}b_i + a_n = 0. \quad (6.9.13)$$

Таким образом, числа b_1, \dots, b_n , т. е. координаты центра фигуры Φ , являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i + a_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n a_{in}x_i + a_n = 0. \end{cases} \quad (6.9.14)$$

Отметим, что если функцию, стоящую в левой части уравнения (6.9.1), обозначить $F(x_1, \dots, x_n)$, то систему уравнений (6.9.14) можно записать в легко запоминающемся виде с помощью частных производных:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Проведенные рассуждения показывают, что равенства (6.9.13) являются необходимыми условиями для координат центров b_1, \dots, b_n фигуры второго порядка Φ . Покажем, что эти условия и достаточны. Выше было доказано, что любая фигура второго порядка в подходящем репере задается одним из нормальных уравнений вида (6.9.6)–(6.9.8). Поэтому можно рассматривать системы уравнений (6.9.14) для фигур, заданных нормальными уравнениями. Для уравнений (6.9.6) и (6.9.7) система (6.9.14) имеет вид

$$\begin{cases} X_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ X_r = 0. \end{cases}$$

Эта система задает $(n-r)$ -мерную координатную плоскость, состоящую из точек вида

$$B(0, \dots, 0, b_{r+1}, \dots, b_n), \quad b_{r+1}, \dots, b_n \in \mathbf{R}.$$

Пусть $M(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $x_i^0 \in \mathbf{C}$ – любая точка (действительная или мнимая) фигуры Φ . Тогда точка $M'(-x_1^0, \dots, -x_r^0, 2b_{r+1} - x_{r+1}^0, \dots, 2b_n - x_n^0)$ также принадлежит фигуре Φ и B – середина отрезка с концами M и M' . Это означает, что B – центр фигуры Φ . Следовательно, система уравнений (6.9.14) является необходимым и достаточным условием для определения координат центров.

Для уравнений вида (6.9.8) система (6.9.14) имеет вид

$$\begin{cases} X_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ X_r = 0, \\ 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система не совместна, следовательно, фигуры с нормальными уравнениями вида (6.9.8) не имеют центров. Наши рассуждения позволяют утверждать справедливость следующей теоремы, описывающей центры фигур второго порядка.

Теорема 6.9.3. (i) Пусть фигура второго порядка Φ в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ задана уравнением (6.9.1). Тогда центры фигуры Φ задаются системой линейных уравнений (6.9.14).

(ii) Множество центров фигур второго порядка первого типа (с нормальными уравнениями вида (6.9.6)) образуют $(n - r)$ -мерную плоскость, и никакой центр не принадлежит фигуре Φ .

(iii) Множество центров фигур второго порядка второго типа (с нормальными уравнениями вида (6.9.7)) образуют $(n - r)$ -мерную плоскость, и все центры принадлежат фигуре Φ .

(iv) Фигуры второго порядка третьего типа (с нормальными уравнениями вида (6.9.8)) не имеют центров.

Следствие 6.9.1. Фигуры второго порядка разных типов в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n не являются аффинно эквивалентными.

Теперь можно завершить аффинную классификацию фигур второго порядка в вещественном аффинном пространстве (считаем, что каждая фигура состоит из действительных и мнимых точек).

Теорема 6.9.4. Две фигуры второго порядка в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же нормальное уравнение.

Доказательство. Зафиксируем в пространстве \mathcal{A}^n аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Согласно теореме 6.9.2, любая фигура второго порядка аффинно эквивалентна фигуре, имеющей в данном репере одно из нормальных уравнений (6.9.6)–(6.9.8). Осталось доказать, что фигуры с различными нормальными уравнениями не являются аффинно эквивалентными. Для этого воспользуемся следующим нетривиальным алгебраическим результатом, доказательство которого можно найти в [2].

Теорема 6.9.5. (см. [2, теорема 27.1]). Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – фиксированный репер в вещественном аффинном пространстве \mathcal{A}^n . Если $F_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ и $F_2(x_1, \dots, x_n) = 0$ – два уравнения второй степени вида (6.9.1), задающие в данном репере одну и ту же фигуру второго порядка (с учетом мнимых точек), то левые части уравнений пропорциональны, т. е. существует $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$ такое, что $F_2(x_1, \dots, x_n) = \lambda F_1(x_1, \dots, x_n)$.

Продолжим доказательство теоремы 6.9.4. Учитывая следствие 6.9.1, достаточно рассматривать фигуры второго порядка одного типа. Пусть Φ_1 и Φ_2 – две такие фигуры,

$$A_1 = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_1}, 0, \dots, 0), r_1 = p_1 + q_1,$$

$$A_2 = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p_2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_2}, 0, \dots, 0), r_2 = p_2 + q_2, -$$

матрицы квадратичных частей их уравнений. Предположим, что Φ_1 и Φ_2 аффинно эквивалентны, т. е. $\Phi_2 = f(\Phi_1)$ для некоторого аффинного преобразования f , заданного в репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ формулой $(x) = S(x') + (\alpha)$. Тогда фигура Φ_2 имеет уравнение, матрица квадратичной части которого равна $S^t A_1 S$, $\det S \neq 0$. Как следует из теоремы 6.9.5,

$$\lambda A_2 = S^t A_1 S, \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0.$$

Из последнего соотношения вытекает, что ранги матриц A_1 и A_2 равны $r_1 = r_2 = r$. Согласно упоминавшемуся выше закону инерции вещественных квадратичных форм, число отрицательных и положительных элементов, стоящих на диагоналях матриц λA_2 и A_1 , одинаково.

Если $\lambda > 0$, то $p_1 = p_2$ и нормальные уравнения фигур Φ_1 и Φ_2 совпадают.

Если $\lambda < 0$, то $p_1 = q_2$, $p_2 = q_1$. Учитывая, что для фигур второго и третьего типов верны неравенства $p_1 \leq \frac{r}{2}$, $p_2 \leq \frac{r}{2}$, получаем, что $p_1 = p_2 = \frac{r}{2}$. Следовательно, нормальные уравнения фигур Φ_1 и Φ_2 совпадают. Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры первого типа. Число λ – коэффициент пропорциональности двух уравнений фигуры Φ_2 , следовательно, эта фигура задается следующими двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} -X_1^2 - \dots - X_{p_2}^2 + X_{p_2+1}^2 + \dots + X_r^2 &= 1, \\ -\lambda X_1^2 - \dots - \lambda X_{p_2}^2 + \lambda X_{p_2+1}^2 + \dots + \lambda X_r^2 &= \lambda, \lambda < 0. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего уравнения на $-\lambda$, получим третье уравнение фигуры Φ_2 :

$$X_1^2 + \dots + X_{p_2}^2 - X_{p_2+1}^2 - \dots - X_r^2 = 1.$$

Возникает противоречие, поскольку множества решений первого и третьего уравнений, очевидно, различны. Следовательно, случай $\lambda < 0$ для фигур первого типа невозможен. ►

Таким образом, множеству классов аффинно эквивалентных фигур второго порядка в пространстве \mathcal{A}^n взаимно однозначно соответствует множество уравнений (6.9.6)–(6.9.8). Заметим, в частности, что эти множества конечны.

Полагая $n = 2$, получаем, что на плоскости \mathbf{E}^2 множество всех фигур второго порядка разбивается на 9 классов аффинно эквивалентных фигур. Соответствующие нормальные уравнения имеют следующий вид:

- 1) $X_1^2 + X_2^2 = 1$ – класс эллипсов;
- 2) $-X_1^2 + X_2^2 = 1$ – класс гипербол;
- 3) $-X_1^2 - X_2^2 = 1$ – класс мнимых эллипсов;
- 4) $-X_1^2 + X_2^2 = 0$ – класс пар пересекающихся прямых;
- 5) $X_1^2 + X_2^2 = 0$ – класс пар мнимых пересекающихся прямых;

- 6) $X_1^2 = 1$ – класс пар параллельных прямых;
- 7) $-X_1^2 = 1$ – класс пар мнимых параллельных прямых;
- 8) $X_1^2 = 0$ – класс сдвоенных прямых;
- 9) $X_1^2 = 2X_2$ – класс парабол.

Упражнение 6.9.1. Проведите аффинную классификацию фигур второго порядка в пространстве \mathbf{E}^3 .

ГЛАВА 7

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Аффинные пространства, которые изучались в гл. 6, определялись как многомерные обобщения евклидова пространства E^3 . При этом аксиоматизировались не все свойства пространства E^3 , а только те, которые описывают связь точек и векторов. Другие важные свойства пространства E^3 , связанные с понятиями расстояния между точками и величиной угла между векторами, не рассматривались. В этой главе будут изучаться точечные евклидовы пространства E^n , которые являются наиболее полным n -мерным обобщением пространства E^3 . Для определения пространства E^n нам потребуются некоторые алгебраические понятия и факты, которые будут изложены в следующем параграфе.

§ 7.1. ЕВКЛИДОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 7.1.1. Пусть V – вещественное векторное пространство. **Скалярным произведением** в пространстве V называется отображение

$$g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto g(\vec{a}, \vec{b}),$$

для которого при любых $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in V, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются условия:

- (i) $g(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = g(\vec{a}_1, \vec{b}) + g(\vec{a}_2, \vec{b}); \quad g(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda g(\vec{a}, \vec{b});$
- (ii) $g(\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2) = g(\vec{a}, \vec{b}_1) + g(\vec{a}, \vec{b}_2); \quad g(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda g(\vec{a}, \vec{b});$
- (iii) $g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \vec{a});$
- (iv) $g(\vec{a}, \vec{a}) > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Вещественное векторное пространство с заданным в нем скалярным произведением называется **евклидовым векторным пространством**.

Условие (i) означает, что отображение g линейно по первому аргументу, условие (ii) означает, что отображение g линейно по второму аргументу. Коротко говорят в этом случае, что отображение g **билинейно**. Из билинейности вытекает, что $g(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, если хотя бы один из векторов \vec{a} или \vec{b} нулевой. Например, $g(\vec{0}, \vec{b}) = g(0 \cdot \vec{0}, \vec{b}) = 0 \cdot g(\vec{0}, \vec{b}) = 0$. Условие (iii) означает **симметричность** ото-

бражения g . Условие (iv) означает, что билинейная функция g **положительно определена**. Итак, скалярное произведение на вещественном векторном пространстве \mathbf{V} – это билинейная симметрическая положительно определенная функция на \mathbf{V} .

Всем перечисленным выше условиям удовлетворяет обычное скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ векторов в пространстве $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$, чем и объясняется терминология. Приведем еще два примера.

1. Пусть \mathbf{V}^n – n -мерное вещественное векторное пространство, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – базис пространства \mathbf{V}^n . Для любых векторов $\vec{a}(l_1, \dots, l_n)$ и $\vec{b}(m_1, \dots, m_n)$, заданных своими координатами в данном базисе, положим

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = l_1 m_1 + \dots + l_n m_n. \quad (7.1.1)$$

Легко проверить, что g – скалярное произведение в \mathbf{V}^n . Можно показать¹, что по формуле (7.1.1), выбирая различные базисы, можно задать любое скалярное произведение в \mathbf{V}^n .

2. Пусть $\mathbf{V} = C[a, b]$ – бесконечномерное вещественное векторное пространство непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Скалярное произведение в пространстве $C[a, b]$ можно задать формулой

$$g(\varphi(t), \psi(t)) = \int_a^b (\varphi(t) \cdot \psi(t)) dt, \quad \forall \varphi(t), \psi(t) \in C[a, b].$$

Далее для простоты записи скалярное произведение векторов $g(\vec{a}, \vec{b})$ будем обозначать просто $\vec{a}\vec{b}$, соответственно скалярный квадрат вектора $g(\vec{a}, \vec{a})$ будет обозначаться \vec{a}^2 .

Наличие скалярного произведения в векторном пространстве \mathbf{V} позволяет для любого вектора определить **длину**:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (7.1.2)$$

Для длины вектора выполняются известные нам по пространству $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ свойства: для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ и любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ верно:

- 1) $|\vec{a}| \geq 0$;
- 2) $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$;
- 3) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$;
- 4) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Первые три свойства легко вытекают из формулы (7.1.2) и определения скалярного произведения. Для доказательства четвертого свойства можно использовать следующее утверждение.

Утверждение 7.1.1. Для любых векторов \vec{a}, \vec{b} из евклидова векторного пространства \mathbf{V} абсолютная величина их скалярного произведения не превосходит произведения длин

$$|\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|. \quad (7.1.3)$$

¹ Билинейные функции на векторных пространствах подробно изучаются в курсе линейной алгебры.

Доказательство. Пусть t – любое вещественное число. Применим условие (iv) из определения скалярного произведения для вектора $t\vec{a} + \vec{b}$. Получим, что для любого $t \in \mathbf{R}$ верно квадратное неравенство $t^2\vec{a}^2 + 2t\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 \geq 0$. Следовательно, дискриминант (деленный на 4) соответствующего квадратного трехчлена неположителен: $(\vec{a}\vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2 \leq 0$. Последнее неравенство перепишем так: $(\vec{a}\vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим формулу (7.1.3). ◀

Докажем теперь свойство 4) для длин векторов. Учитывая утверждение 7.1.1, имеем

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 \leq \vec{a}^2 + 2|\vec{a}\vec{b}| + \vec{b}^2 \leq \\ &\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей доказанного неравенства, получим неравенство 4).

Определим величину угла φ между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} по формуле

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \quad (7.1.4)$$

Неравенство (7.1.3) обеспечивает корректность этого определения.

Будем говорить, что векторы \vec{a} и \vec{b} **ортогональны** (обозначение $\vec{a} \perp \vec{b}$), если их скалярное произведение равно нулю $\vec{a}\vec{b} = 0$. Ортогональность двух векторов означает, что либо один из них нулевой (или оба нулевые), либо величина угла между ними равна $\frac{\pi}{2}$.

Базис $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ евклидова векторного пространства \mathbf{V}^n называется **ортогональным базисом**, если базисные векторы попарно ортогональны: $\vec{a}_i\vec{a}_j = 0$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Ортогональный базис можно построить, исходя из произвольного базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ пространства \mathbf{V}^n . Для этого к векторам $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ надо применить так называемый **процесс ортогонализации**. Он заключается в следующем. Полагаем $\vec{a}_1 = \vec{e}_1$. Второй вектор \vec{a}_2 ищем в виде $\vec{a}_2 = \vec{e}_2 + \alpha_1\vec{a}_1$, где α_1 – вещественное число, которое определяется из условия ортогональности \vec{a}_1 и \vec{a}_2 :

$$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1\vec{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_1\vec{e}_2 + \alpha_1\vec{a}_1^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\frac{\vec{a}_1\vec{e}_2}{\vec{a}_1^2}.$$

Третий вектор \vec{a}_3 ищем в виде $\vec{a}_3 = \vec{e}_3 + \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2$, где β_1, β_2 – вещественные числа, которые, как и выше, определяются из условий ортогональности:

$$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_3, \quad \vec{a}_2 \perp \vec{a}_3.$$

Получим, с учетом ортогональности \vec{a}_1 и \vec{a}_2 :

$$\beta_1 = -\frac{\vec{a}_1\vec{e}_3}{\vec{a}_1^2}, \quad \beta_2 = -\frac{\vec{a}_2\vec{e}_3}{\vec{a}_2^2}.$$

И так далее, пока не построим последний вектор \vec{a}_n . Нетрудно убедиться, что матрица перехода от векторов $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к векторам $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ невырожденная (она треугольная с единицами, стоящими по диагонали), следовательно, $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ – ортогональный базис.

Если теперь нормировать каждый из векторов \vec{a}_i , т. е. построить векторы $\vec{c}_i = \frac{\vec{a}_i}{|\vec{a}_i|}$, то получим **ортонормированный базис** $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ пространства \mathbf{V}^n , т. е. базис, состоящий из попарно ортогональных векторов единичной длины. Легко видеть, что базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ евклидова векторного пространства \mathbf{V}^n является ортонормированным тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов, заданных координатами в этом базисе, вычисляется по формуле (7.1.1). В таком случае для вычисления длины вектора и величины угла между двумя векторами получим формулы

$$|\vec{a}| = \sqrt{l_1^2 + \dots + l_n^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{l_1 m_1 + \dots + l_n m_n}{\sqrt{l_1^2 + \dots + l_n^2} \sqrt{m_1^2 + \dots + m_n^2}}.$$

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица перехода от ортонормированного базиса $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ к другому ортонормированному базису $(\vec{c}'_1, \dots, \vec{c}'_n)$. Рассмотрим матрицу $B = (b_{ij})$, равную произведению матрицы A и транспонированной к ней $B = A^t A$. Согласно закону умножения матриц, получим

$$b_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj}. \quad (7.1.5)$$

Формула (7.1.5) означает, что число b_{ij} есть скалярное произведение вектора \vec{c}'_i на вектор \vec{c}'_j . Следовательно, $b_{ii} = (\vec{c}'_i)^2 = 1$ и $b_{ij} = \vec{c}'_i \vec{c}'_j = 0$, если $i \neq j$, т. е. матрица B – единичная. Таким образом, для матрицы A верно равенство

$$A^t A = E_n. \quad (7.1.6)$$

Определение 7.1.2. Квадратная $(n \times n)$ -матрица A , удовлетворяющая условию (7.1.6), называется **ортогональной**.

Переходя в равенстве (7.1.6) к определителям, получаем, что $(\det(A))^2 = 1$, т. е. определитель ортогональной матрицы равен ± 1 .

Ортогональные матрицы порядка 2 встречались в § 2.1, когда выводились формулы преобразования прямоугольных координат на плоскости. Такие матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ либо } A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

В первом случае $\det(A) = 1$, во втором – $\det(A) = -1$.

Пусть \mathbf{W} – подпространство евклидова векторного пространства \mathbf{V} . Обозначим символом \mathbf{W}^\perp множество всех векторов из \mathbf{V} , ортогональных каждому вектору подпространства \mathbf{W} : $\mathbf{W}^\perp = \{\vec{v} \in \mathbf{V} \mid \vec{v}\vec{a} = 0 \quad \forall \vec{a} \in \mathbf{W}\}$.

Теорема 7.1.1. Для любого подпространства \mathbf{W} конечномерного евклидова векторного пространства \mathbf{V}^n множество \mathbf{W}^\perp также является подпространством,

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp. \quad (7.1.7)$$
$$\vec{v}\vec{a} = \vec{v}(\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k) = \lambda_1(\vec{v}\vec{a}_1) + \dots + \lambda_k(\vec{v}\vec{a}_k) = 0.$$
[illegible]
$$\dim(\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp) = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp = k + (n - k) = n,$$

Если $\mathbf{W} \perp \mathbf{U}$ и $\vec{c} \in \mathbf{W} \cap \mathbf{U}$, то $\vec{c}^2 = 0$, т. е. $\vec{c} = \vec{0}$. Таким образом, $\mathbf{W} \cap \mathbf{U} = \{\vec{0}\}$, т. е. ортогональные подпространства пересекаются по нулевому вектору. По определению подпространства \mathbf{W} и \mathbf{W}^\perp ортогональны друг другу.

Определение 7.1.4. Линейный оператор $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \vec{a} \mapsto \varphi(\vec{a})$, евклидова векторного пространства \mathbf{V} называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ верно

$$\varphi(\vec{a})\varphi(\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}.$$

Из определения вытекает, что ортогональный линейный оператор сохраняет длины векторов ($\forall \vec{a} \in \mathbf{V} \mid \varphi(\vec{a}) = |\vec{a}|$) и величины углов между векторами, поскольку эти величины определяются через скалярное произведение. Поэтому если $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ – ортонормированный базис, то и преобразованный базис $(\varphi(\vec{c}_1), \dots, \varphi(\vec{c}_n))$ также ортонормированный. Следовательно, матрица ортогонального линейного оператора в ортонормированном базисе является ортогональной матрицей.

Определение 7.1.5. Пусть $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ – упорядоченный набор векторов евклидова векторного пространства \mathbf{V} . **Матрицей Грама** этого набора векторов называется квадратная $(k \times k)$ -матрица

$$G(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = (\vec{a}_i \vec{a}_j)_{i,j=1, \dots, k}$$

попарных скалярных произведений этих векторов.

Утверждение 7.1.2. Если система векторов $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ линейно независима, то $G(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) > 0$.

Доказательство. Подпространство $\mathbf{W}^k = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ является евклидовым векторным пространством относительно скалярного произведения в нем, индуцированного из V (скалярное произведение векторов из \mathbf{W}^k такое же, как в пространстве V). Пусть $A = (a_{ij})$ – $(k \times k)$ -матрица, i -я строка которой есть строка координат вектора \vec{a}_i в некотором ортонормированном базисе пространства \mathbf{W}^k . Так как векторы $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ линейно независимы, то $\det(A) \neq 0$. Очевидно, что $G(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = AA^t$, следовательно, $G(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \det(A)\det(A^t) = (\det(A))^2 > 0$. ►

Отметим, что можно доказать более общий вариант утверждения, а именно показать, что в случае линейной зависимости векторов $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ определитель их матрицы Грама равен нулю, однако нам потребуется только тот результат, который доказан.

§ 7.2. ЕВКЛИДОВЫ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 7.2.1. Евклидовым точечным пространством называется вещественное аффинное пространство \mathbf{E} , связанное с евклидовым векторным пространством \mathbf{V} .

Примерами евклидовых точечных пространств являются рассматриваемые в первой части курса прямая \mathbf{E}^1 , плоскость \mathbf{E}^2 и пространство \mathbf{E}^3 , связанные с евклидовыми векторными пространствами $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$, $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ соответственно. Еще один важный пример – арифметическое аффинное пространство \mathbf{R}^n вещественных строк длины n , связанное с векторным пространством $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$, в котором скалярное произведение задается формулой

$$g((l_1, \dots, l_n), (m_1, \dots, m_n)) = l_1 m_1 + \dots + l_n m_n.$$

Пусть E^n обозначает произвольное n -мерное евклидово точечное пространство, связанное с евклидовым векторным пространством V^n . Поскольку пространство E^n – вещественное аффинное пространство специального типа, к нему относится все то, что изложено в гл. 6 для произвольных n -мерных аффинных пространств, в том числе в § 6.8. Далее мы будем говорить о дополнительных свойствах пространства E^n , вытекающих из его специфики. Для краткости *евклидово точечное пространство* будем называть просто *евклидовым пространством*.

Прежде всего, в евклидовом пространстве E^n можно определить расстояние.

Определение 7.2.2. Для любых точек $A, B \in E^n$ **расстоянием** от точки A до точки B называется число $d(A, B)$, равное длине вектора \overline{AB} :

$$d(A, B) = |\overline{AB}|. \quad (7.2.1)$$

Утверждение 7.2.1. Множество E^n с расстоянием, заданным формулой (7.2.1), является **метрическим пространством**. Это означает, что для любых точек $A, B, C \in E^n$ верно:

- (i) $d(A, B) \geq 0$; $(d(A, B) = 0) \Leftrightarrow (A = B)$;
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

Справедливость свойств (i)–(iii) для расстояния следует из свойств длины вектора, отмеченных в начале § 7.1.

Как и в любом метрическом пространстве, в E^n можно рассматривать *сферы* и *шары*.

Определение 7.2.3. Пусть M_0 – произвольная точка евклидова пространства E^n , r – положительное вещественное число. **Сферой** радиуса r с центром M_0 называется подмножество в E^n , которое обозначается $S(M_0, r)$ и определяется следующим образом:

$$S(M_0, r) = \{M \in E^n \mid d(M, M_0) = r\}.$$

Естественным образом определяются **открытый шар**:

$$B(M_0, r) = \{M \in E^n \mid d(M, M_0) < r\}$$

и **замкнутый шар (диск)**:

$$D(M_0, r) = \{M \in E^n \mid d(M, M_0) \leq r\}.$$

Если Φ_1 и Φ_2 – фигуры в евклидовом пространстве E^n , то **расстоянием** между Φ_1 и Φ_2 называется число

$$d(\Phi_1, \Phi_2) = \inf\{d(A, B) \mid A \in \Phi_1, B \in \Phi_2\}.$$

Ясно, что если фигуры пересекаются ($\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \emptyset$), то $d(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Обратное неверно. Нетрудно привести соответствующие примеры, например, гипербола и ее асимптоты на плоскости E^2 .

Среди множества всех аффинных реперов в \mathbf{E}^n можно выделить **ортонормированные реперы**: $(O, \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n)$. Здесь O – фиксированная точка пространства \mathbf{E}^n , $(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n)$ – ортонормированный базис евклидова векторного пространства \mathbf{V}^n . Если $A(x_1, \dots, x_n), B(y_1, \dots, y_n)$ – точки евклидова пространства, заданные своими координатами в ортонормированном репере, то расстояние между ними равно $d(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$.

Сферы и открытые шары в ортонормированном репере задаются следующими условиями:

$$S(M_0, r) = \{M(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{E}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 = r^2\},$$

$$B(M_0, r) = \{M(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{E}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}.$$

Здесь $M(x_1^0, \dots, x_n^0)$ – центр сферы и шара. Обозначим $S^{n-1}(r), B^n(r), D^n(r)$ соответственно сферу, открытый и замкнутый круг радиусом r с центром в начале координат.

Пусть $B^{n_1} = M_0 + \mathbf{W}^{n_1}, B^{n_2} = N_0 + \mathbf{W}^{n_2}$ – плоскости в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n . Напомним, мы различаем (см. § 6.2) четыре различных типа их взаимного расположения. Они могут пересекаться ($B^{n_1} \cap B^{n_2} \neq \emptyset$), и тогда их пересечение есть плоскость с направляющим пространством $\mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^{n_2}$. Если же плоскости не пересекаются ($B^{n_1} \cap B^{n_2} = \emptyset$), то они могут скрещиваться, либо быть параллельными, либо частично параллельными. В пространстве \mathbf{E}^n добавляется еще один тип взаимного расположения плоскостей.

Определение 7.2.4. Плоскости $B^{n_1} = M_0 + \mathbf{W}^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + \mathbf{W}^{n_2}$ в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n называются **ортогональными** (или **перпендикулярными**), если ортогональны их направляющие пространства, т. е. $\mathbf{W}^{n_1} \perp \mathbf{W}^{n_2}$. Для перпендикулярных плоскостей используем обозначение $B^{n_1} \perp B^{n_2}$.

Обращаем внимание читателя на то, что в данном случае терминология не во всех случаях совпадает с той, которая принята в средней школе для пространства \mathbf{E}^3 . Понятия согласованы в случаях, когда речь идет о перпендикулярности двух прямых либо о перпендикулярности прямой и (двумерной) плоскости в \mathbf{E}^3 . Однако две перпендикулярные двумерные плоскости в \mathbf{E}^3 (в школьной терминологии) не являются таковыми в смысле определения 7.2.3. Далее мы уточним это различие, определив понятие величины угла между двумя плоскостями в \mathbf{E}^n .

Утверждение 7.2.2. Две ортогональные плоскости в пространстве \mathbf{E}^n либо скрещиваются, либо пересекаются в одной точке.

Доказательство. Если $B^{n_1} = M_0 + \mathbf{W}^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + \mathbf{W}^{n_2}$ – ортогональные плоскости, то $\mathbf{W}^{n_1} \perp \mathbf{W}^{n_2}$ и, как отмечено в конце § 7.1, $\mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^{n_2} = \{\vec{0}\}$. Следовательно, если $B^{n_1} \cap B^{n_2} \neq \emptyset$, то $B^{n_1} \cap B^{n_2}$ – плоскость нулевой размерности, т. е. точка. Если же $B^{n_1} \cap B^{n_2} = \emptyset$, то плоскости скрещиваются. ◀

Рассмотрим важную задачу о вычислении расстояния между двумя плоскостями $B^{n_1} = M_0 + \mathbf{W}^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + \mathbf{W}^{n_2}$ в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n . Согласно теоре-

ме 7.1.1, евклидово векторное пространство \mathbf{V}^n есть прямая сумма подпространства $\mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2}$ и его ортогонального дополнения $(\mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2})^\perp$:

$$\mathbf{V}^n = (\mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2}) \oplus (\mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2})^\perp. \quad (7.2.2)$$

Рассмотрим для данных плоскостей вектор-мостик $\overline{M_0 N_0}$. В соответствии с разложением (7.2.2) этот вектор (единственным образом) раскладывается в сумму

$$\overline{M_0 N_0} = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{b} \in \mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2}, \quad \vec{c} \in (\mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2})^\perp. \quad (7.2.3)$$

Покажем, что $d(\mathcal{B}^{n_1}, \mathcal{B}^{n_2}) = |\vec{c}|$. Прежде всего, отметим, что существуют точки $P \in \mathcal{B}^{n_1}, Q \in \mathcal{B}^{n_2}$ такие, что $\overline{PQ} = \vec{c}$. Поскольку $\vec{b} \in \mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2}$, то $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, где $\vec{b}_1 \in \mathbf{W}^{n_1}, \vec{b}_2 \in \mathbf{W}^{n_2}$. В плоскости \mathcal{B}^{n_1} существует точка P такая, что $\overline{M_0 P} = \vec{b}_1$, в плоскости \mathcal{B}^{n_2} существует точка Q такая, что $\overline{N_0 Q} = -\vec{b}_2$. Тогда $\overline{PQ} = \overline{PM_0} + \overline{M_0 N_0} + \overline{N_0 Q} = -\vec{b}_1 + (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{b}_2 = \vec{c}$ (рис. 7.2.1).

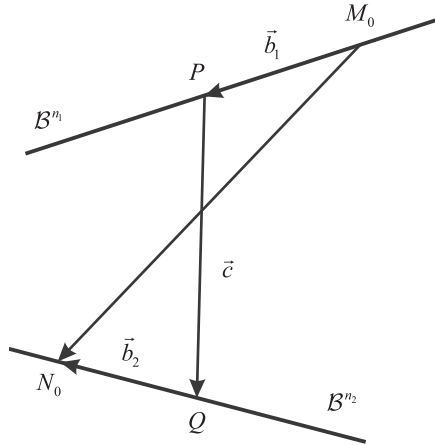


Рис. 7.2.1

Пусть $M \in \mathcal{B}^{n_1}, N \in \mathcal{B}^{n_2}$ – произвольные точки рассматриваемых плоскостей. Тогда $\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PQ} + \overline{QN} = \vec{a}_1 + \vec{c} + \vec{a}_2 = \vec{a} + \vec{c}$. Здесь

$$\overline{MP} = \vec{a}_1 \in \mathbf{W}^{n_1}, \quad \overline{QN} = \vec{a}_2 \in \mathbf{W}^{n_2}, \quad \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \in \mathbf{W}^{n_1} + \mathbf{W}^{n_2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} d(M, N) &= |\overline{MN}| = \sqrt{\overline{MN}^2} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{c} + \vec{c}^2} = \\ &= \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{c}^2} \geq \sqrt{\vec{c}^2} = |\vec{c}| = d(P, Q). \end{aligned}$$

[illegible]

Наряду с расстоянием для двух плоскостей в евклидовом пространстве E^n можно вычислять *величину угла* (далее для краткости будем использовать термин *угол*) между ними. Разумеется, если хотя бы одна из плоскостей является точкой (имеет нулевое направляющее пространство), то угол между плоскостями не определяется. Пусть $B^{n_1} = M_0 + W^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + W^{n_2}$ – плоскости в E^n с ненулевыми направляющими пространствами, $0 < n_1 \leq n_2$. Если $W^{n_1} \subset W^{n_2}$, т. е. плоскости параллельны или первая плоскость содержится во второй, то естественно считать, что они образуют нулевой угол. Далее будем рассматривать случай, когда $W^{n_1} \not\subset W^{n_2}$. Чтобы определить понятие угла между плоскостями $B^{n_1} = M_0 + W^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + W^{n_2}$, можно по аналогии с понятием расстояния между фигурами для любых ненулевых век-

Таким образом, *углом между плоскостями* $B^{n_1} = M_0 + \mathbf{W}^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + \mathbf{W}^{n_2}$ ($0 < n_1 \leq n_2$ и $\mathbf{W}^{n_1} \not\subset \mathbf{W}^{n_2}$) в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n будем считать наименьший угол, который образуют ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} такие, что $\vec{a} \in \mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^\perp$, $\vec{b} \in \mathbf{W}^{n_2} \cap \mathbf{W}^\perp$. Здесь $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^{n_2}$.

Заметим, что в рассматриваемой ситуации подпространства $W^{n_1} \cap W^\perp$ и $W^{n_2} \cap W^\perp$ ненулевые. Действительно, допустим, что $W^{n_1} \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$. Поскольку $W \subset W^{n_1}$, то по теореме 7.1.1 $W^{n_1} = W \oplus (W^{n_1} \cap W^\perp)$ и, следовательно, $W^{n_1} = W = W^{n_1} \cap W^{n_2}$, т. е. $W^{n_1} \subset W^{n_2}$. Получили противоречие, поэтому $W^{n_1} \cap W^\perp \neq \{\vec{0}\}$.

Поскольку

$$(W^{n_1} \cap W^\perp) \cap (W^{n_2} \cap W^\perp) = (W^{n_1} \cap W^{n_2}) \cap W^\perp = W \cap W^\perp = \{\vec{0}\},$$

то можно считать, что направляющие пространства данных плоскостей пересекаются по нулевому вектору $W^{n_1} \cap W^{n_2} = \{\vec{0}\}$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.2.1. Пусть W – ненулевое подпространство евклидова векторного пространства V^n , \vec{a} – ненулевой вектор V^n , не принадлежащий W . Тогда угол φ_0 , который вектор \vec{a} образует со своей ортогональной проекцией $\vec{b}_0 = pr_W \vec{a}$ на W , является наименьшим из углов, который данный вектор образует с векторами подпространства W . (Если $\vec{b}_0 = \vec{0}$, то считаем, что $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.)

Доказательство. Пусть O – точка евклидова точечного пространства E^n , связанного с V^n . Отложим векторы \vec{a} и \vec{b}_0 от точки O , получим точки A и B_0 соответственно (рис. 7.2.2).

Если $\vec{b}_0 \neq \vec{0}$, то OAB_0 – прямоугольный треугольник, $\cos \varphi_0 = \frac{|OB_0|}{|OA|} = \frac{|\vec{b}_0|}{|\vec{a}|}$ и $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Пусть \vec{b} – произвольный ненулевой вектор подпространства W , φ – величина угла между векторами \vec{a} и \vec{b} . Отложим вектор \vec{b} от точки O , получим точку B .

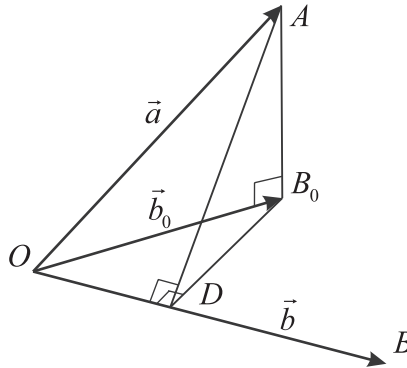


Рис. 7.2.2

Если вектор \vec{b} не коллинеарен вектору \vec{b}_0 , то $OABB_0$ – тетраэдр в пространстве E^3 . Пусть AD – перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую, проходящую через точки O и B . Если точка D лежит на луче OB (этот случай изображен на рис. 7.2.2), то $\cos \varphi = \frac{|OD|}{|OA|}$, и так как $|OD| < |OB_0|$ (катет меньше гипотенузы),

то $\varphi > \varphi_0$. Если же D не лежит на отрезке OB , то $\varphi > \frac{\pi}{2} \geq \varphi_0$. В случае, когда вектор \vec{b} коллинеарен вектору \vec{b}_0 , получаем, что либо $\varphi = \varphi_0$ ($\vec{b} \uparrow \vec{b}_0$), либо $\varphi = \pi - \varphi_0$ ($\vec{b} \downarrow \vec{b}_0$). Следовательно, для любого вектора $\vec{b} \in \mathbf{W}, \vec{b} \neq \vec{0}$ $\varphi \geq \varphi_0$. ◀

Пусть $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n_1}), (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n_2})$ – ортонормированные базисы подпространств W^{n_1} и W^{n_2} соответственно. Пусть $\vec{a} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_{n_1} \vec{a}_{n_1} \in W^{n_1}$, $\vec{b}_0 = pr_{W^{n_2}} \vec{a} = y_1 \vec{b}_1 + \dots + y_{n_2} \vec{b}_{n_2}$. Поскольку векторы $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n_2}$ включаются в некоторый ортонормированный базис пространства V^n , то $y_j = \vec{a} \vec{b}_j, j \in \{1, \dots, n_2\}$, т. е.

$$y_j = x_1 (\vec{a}_1 \vec{b}_j) + \dots + x_{n_1} (\vec{a}_{n_1} \vec{b}_j) = \alpha_{1j} x_1 + \dots + \alpha_{n_1j} x_{n_1}, \alpha_{ij} \in \mathbf{R}.$$

В доказательстве леммы 7.2.1 отмечено, что величина наименьшего угла, который вектор \vec{a} образует с векторами подпространства W^{n_2} , равна $\varphi_0 = \arccos \frac{|\vec{b}_0|}{|\vec{a}|}$. Можно считать, что $|\vec{a}| = 1$. Тогда $\varphi_0 = \arccos |\vec{b}_0|$. Таким образом, для вычисления угла между плоскостями B^{n_1} и B^{n_2} нужно найти наибольшее значение выражения

$$|\vec{b}_0|^2 = y_1^2 + \dots + y_{n_2}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i1} x_i \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{in_2} x_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n_1} \beta_{ij} x_i x_j,$$

если $x_1, \dots, x_{n_1} \in \mathbf{R}$ и $x_1^2 + \dots + x_{n_1}^2 = 1$.

На алгебраическом языке эта задача формулируется следующим образом. Рассматривается квадратичная форма g , заданная на евклидовом векторном пространстве W^{n_1} в ортонормированном базисе $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n_1})$ формулой $g(x_1, \dots, x_{n_1}) = \sum_{i,j=1}^{n_1} \beta_{ij} x_i x_j$. Требуется найти максимум этой формы при условии, что $x_1^2 + \dots + x_{n_1}^2 = 1$. Известно (см. [2]), что для любой квадратичной формы существует ортонормированный базис (с координатами z_1, \dots, z_{n_1}), в котором она имеет канонический вид

$$g(z_1, \dots, z_{n_1}) = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_{n_1} z_{n_1}^2, \lambda_1, \dots, \lambda_{n_1} \in \mathbf{R}.$$

При переходе от одного ортонормированного базиса к другому сохраняется условие $z_1^2 + \dots + z_{n_1}^2 = 1$. По смыслу задачи $g(z_1, \dots, z_{n_1})$ выражает длину вектора, следовательно, $g(z_1, \dots, z_{n_1}) \geq 0$. Это возможно только при условии, что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$ неотрицательны. Пусть λ_1 – наибольшее из них. Тогда $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_{n_1} z_{n_1}^2 \leq \lambda_1 (z_1^2 + \dots + z_{n_1}^2) = \lambda_1$. Итак, величина угла между плоскостями B^{n_1} и B^{n_2} равна $\varphi_0 = \arccos \sqrt{\lambda_1}$.

Исходя из изложенного выше, практически величину угла φ_0 между двумя плоскостями $B^{n_1} = M_0 + W^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + W^{n_2}$ ($0 < n_1 \leq n_2$) в евклидовом пространстве E^n можно вычислить, действуя следующим образом.

Шаг 1. Проверяем условие $W^{n_1} \subset W^{n_2}$. Если $W^{n_1} \subset W^{n_2}$, то $\varphi_0 = 0$. Если $W^{n_1} \not\subset W^{n_2}$, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Находим $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^{n_2}$. Если $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^{n_2} \neq \{\vec{0}\}$, то вычисляем \mathbf{W}^\perp , заменяем подпространства \mathbf{W}^{n_1} и \mathbf{W}^{n_2} на $\mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^\perp$ и $\mathbf{W}^{n_2} \cap \mathbf{W}^\perp$ соответственно (сохраняя за двумя последними пересечениями обозначения \mathbf{W}^{n_1} и \mathbf{W}^{n_2}) и переходим к шагу 3. Если $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{n_1} \cap \mathbf{W}^{n_2} = \{\vec{0}\}$, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Выбираем ортонормированные базисы $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n_1})$ и $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n_2})$ подпространств \mathbf{W}^{n_1} и \mathbf{W}^{n_2} соответственно. Вычисляем значения $\alpha_{ij} = \vec{a}_i \vec{b}_j$, $i \in \{1, \dots, n_1\}$, $j \in \{1, \dots, n_2\}$. Строим квадратичную форму

$$g(x_1, \dots, x_{n_1}) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i1} x_i \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{in_2} x_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n_1} \beta_{ij} x_i x_j.$$

Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Составляем матрицу $B = (\beta_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, n_1\}$ квадратичной формы $g(x_1, \dots, x_{n_1})$. Находим собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n_1}$, этой матрицы. Среди них выбираем наибольшее λ_1 . Величина угла между плоскостями $B^{n_1} = M_0 + \mathbf{W}^{n_1}$ и $B^{n_2} = N_0 + \mathbf{W}^{n_2}$ равна $\varphi_0 = \arccos \sqrt{\lambda_1}$.

Заметим в заключение, что поскольку величины углов определяются с помощью векторов, то начальные точки плоскостей не играют роли и можно говорить о величине угла между подпространствами \mathbf{W}^{n_1} и \mathbf{W}^{n_2} евклидова векторного пространства \mathbf{V}^n .

В евклидовом пространстве \mathbf{E}^n среди множества всех n -мерных параллелепипедов можно выделить *прямоугольные параллелепипеды*. Пусть $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ – **ортогональный репер** в пространстве \mathbf{E}^n , т. е. такой репер, базисные векторы которого попарно ортогональны: $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$, $i \neq j$.

Определение 7.2.5. *n -Мерным прямоугольным параллелепипедом в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n называется n -мерный параллелепипед P^n , связанный с ортогональным репером $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.*

Это определение означает, что P^n задается в ортогональном репере следующим образом: $P^n = \{M(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$. Длины ребер этого параллелепипеда, исходящих из одной вершины, т. е. положительные числа $a_i = |\vec{a}_i|$, $i = 1, \dots, n$, называются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед, у которого все измерения равны ($|\vec{a}_i| = a$, $i = 1, \dots, n$), называется **n -мерным кубом с ребром a** .

§ 7.3. ОБЪЕМЫ НЕКОТОРЫХ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbf{E}^n

По аналогии с малыми размерностями определим *объем* n -мерного параллелепипеда. Двумерный параллелепипед на евклидовой плоскости \mathbf{E}^2 – это параллелограмм $ABCD$, построенный на векторах $\vec{e}_1 = \overline{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overline{AD}$. В § 1.7 отмечалось, что, зная координаты векторов-ребер $\overline{AB}(x_1, y_1)$ и $\overline{AD}(x_2, y_2)$ в не-

котором ортонормированном базисе, площадь параллелограмма можно вычислить по формуле

$$S_{ABCD} = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Точно так же объем трехмерного параллелепипеда в пространстве \mathbf{E}^3 можно вычислить (см. теорему 1.8.1) по формуле

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Здесь в строках стоят координаты в некотором ортонормированном базисе векторов-ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины.

Пусть теперь P^n – n -мерный параллелепипед в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n , связанный с репером $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Пусть заданы координаты в некотором ортонормированном базисе векторов-ребер этого параллелепипеда $\vec{e}_i(l_{i1}, \dots, l_{in})$, $i = 1, \dots, n$.

Определение 7.3.1. *n -Мерным объемом параллелепипеда P^n называется число $\text{vol}_n(P^n) = |\det(l_{ij})|$.*

Здесь $L = (l_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ – матрица, в i -й строке которой стоят координаты базисного вектора \vec{e}_i . Поскольку при транспонировании матриц определители не изменяются, то в определении объема координаты векторов \vec{e}_i можно ставить и по столбцам. Убедимся, что данное определение корректно, т. е. не зависит от выбора ортонормированного базиса. Действительно, при переходе от одного ортонормированного базиса к другому координатные столбцы векторов \vec{e}_i изменяются по правилу

$$\begin{pmatrix} l_{i1} \\ \dots \\ l_{in} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} l'_{i1} \\ \dots \\ l'_{in} \end{pmatrix}.$$

Здесь S – матрица перехода от одного базиса к другому, которая в рассматриваемой ситуации является ортогональной матрицей, в частности, $\det(S) = \pm 1$. Следовательно:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(P^n) &= \left| \det \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & l_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{1n} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \right| = \left| \det S \begin{pmatrix} l'_{11} & \dots & l'_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ l'_{1n} & \dots & l'_{nn} \end{pmatrix} \right| = \\ &= |\det S| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} l'_{11} & \dots & l'_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ l'_{1n} & \dots & l'_{nn} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} l'_{11} & \dots & l'_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ l'_{1n} & \dots & l'_{nn} \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Отметим, что один и тот же параллелепипед может быть связан с различными реперами. Однако набор векторов-ребер, выходящих из начала координат, во всех

случаях будет один и тот же с точностью до нумерации и замены некоторых векторов на противоположные. Это очевидно для любого параллелепипеда в пространстве \mathbf{E}^3 . Разумеется, в n -мерном случае картина аналогичная. Следовательно, определение 7.3.1 не зависит от выбора репера, по которому строится параллелепипед.

Из определения 7.3.1 вытекает, что n -мерный объем n -мерного прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений: $\text{vol}_n(P^n) = a_1 \cdots a_n$, в частности, объем n -мерного куба с ребром a равен a^n . Чтобы убедиться в этом, следует нормировать векторы ортогонального базиса, на которых строится прямоугольный параллелепипед, в результате получим ортонормированный базис

$\left(\frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}, \dots, \frac{\vec{a}_n}{|\vec{a}_n|} \right)$. Матрица (l_{ij}) из определения 7.3.1 в этом случае будет диагональ-

ной $(l_{ij}) = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, следовательно, $\text{vol}_n(P^n) = |\det \text{diag}(a_1, \dots, a_n)| = a_1 \cdots a_n$.

Следующее утверждение позволяет вычислять объем параллелепипеда, не прибегая к координатам векторов-ребер.

Утверждение 7.3.1. Объем n -мерного параллелепипеда P^n , связанного с репером $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, можно вычислить по формуле

$$\text{vol}_n(P^n) = \sqrt{\det G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}, \quad (7.3.1)$$

где $G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{e}_i \vec{e}_j)_{i,j=1, \dots, n}$ – матрица Грама попарных скалярных произведений базисных векторов.

Доказательство. Будем использовать введенные выше обозначения. Достаточно заметить, что $LL^t = G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Следовательно, $(\text{vol}_n(P^n))^2 = |\text{vol}_n(P^n)|^2 = |\det(L)| \cdot |\det(L^t)| = \det(LL^t) = \det G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, откуда и вытекает равенство (7.3.1). ◀

В качестве следствия получаем многомерный аналог известных формул для вычисления площади параллелограмма на плоскости \mathbf{E}^2 и объема параллелепипеда в \mathbf{E}^3 .

Следствие 7.3.1. Пусть P^{n-1} – $(n-1)$ -мерный параллелепипед, связанный с репером $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$. Тогда

$$\text{vol}_n(P^n) = \text{vol}_{n-1}(P^{n-1}) \cdot h, \quad (7.3.2)$$

где h – расстояние от точки $E_n(0, \dots, 1)$ до координатной гиперплоскости $O + L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ («высота» параллелепипеда P^n , опущенная из вершины E_n до «основания» P^{n-1}).

Доказательство. Пусть $\vec{e}_n = \vec{b} + \vec{c}$ – разложение вектора $\vec{e}_n = \overline{OE_n}$ в соответствии с разложением пространства $V^n = L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}) \oplus (L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}))^\perp$. Здесь $\vec{b} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \vec{e}_{n-1}$ – ортогональная проекция вектора \vec{e}_n на подпространство $L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$. Тогда расстояние h от точки $E_n(0, \dots, 1)$ до гиперплоскости $O + L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ равно длине вектора $\vec{c} = \vec{e}_n - \vec{b}$. В матрице Грама

$$G(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = \begin{pmatrix} \bar{e}_1^2 & \bar{e}_1\bar{e}_2 & \dots & \bar{e}_1\bar{e}_n \\ \bar{e}_2\bar{e}_1 & \bar{e}_2^2 & \dots & \bar{e}_2\bar{e}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{e}_n\bar{e}_1 & \bar{e}_n\bar{e}_2 & \dots & \bar{e}_n^2 \end{pmatrix},$$

не изменяя ее определителя, сделаем следующее преобразование: вычтем из последнего столбца линейную комбинацию первых $n-1$ столбцов с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ соответственно. Тогда в последнем столбце на i -м месте будет стоять скалярное произведение $\bar{e}_i(\bar{e}_n - \alpha_1\bar{e}_1 - \dots - \alpha_{n-1}\bar{e}_{n-1}) = \bar{e}_i\bar{c}$. Поскольку $\bar{e}_i \perp \bar{c}, i = 1, \dots, n-1$, то первые $n-1$ элементов столбца будут равны 0, а на последнем месте будет число $\bar{e}_n\bar{c} = (\bar{b} + \bar{c})\bar{c} = \bar{c}^2$. Следовательно,

$$G(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = G(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-1}) \cdot \bar{c}^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получаем формулу (7.3.2). ◀

Далее по аналогии с малыми размерностями определим *объем* n -мерного симплекса. Двумерный симплекс $\sigma_2 = \sigma_2(A_0, A_1, A_2)$ на евклидовой плоскости \mathbf{E}^2 – это треугольник $A_0A_1A_2$. Его площадь равна половине площади параллелограмма, связанного с репером $(A_0, \overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2})$. Трехмерный симплекс $\sigma_3 = \sigma_3(A_0, A_1, A_2, A_3)$ в евклидовом пространстве \mathbf{E}^3 – это тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$. Нетрудно видеть, что его объем равен шестой части объема параллелепипеда, связанного с репером $(A_0, \overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, \overline{A_0A_3})$. Итак, для малых размерностей имеем формулы

$$\text{vol}_2(\sigma_2) = \frac{1}{2} \text{vol}_2(P^2), \quad \text{vol}_3(\sigma_3) = \frac{1}{6} \text{vol}_3(P^3).$$

Пусть $\sigma_n = \sigma_n(A_0, \dots, A_n)$ – n -мерный симплекс в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n с вершинами A_0, \dots, A_n .

Определение 7.3.2. *n -Мерным объемом симплекса $\sigma_n = \sigma_n(A_0, \dots, A_n)$ в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n с вершинами A_0, \dots, A_n называется число $\text{vol}_n(\sigma_n) = \frac{1}{n!} \text{vol}_n(P^n)$, где P^n – n -мерный параллелепипед, связанный с репером $(A_0, \overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_0A_n})$.*

Читателю предлагается в качестве упражнения убедиться, что данное определение корректно, т. е. не зависит от перестановки вершин симплекса.

Теперь можно определить объемы фигур в пространстве \mathbf{E}^n , которые разбиваются на симплексы, если считать, что объем фигуры, составленной из нескольких фигур, равен сумме объемов составляющих фигур.

Рассмотрим один из возможных способов определения объема n -мерного шара в пространстве \mathbf{E}^n . Для этого вновь обратимся к малым размерностям. Будем считать, что на прямой \mathbf{E}^1 , на плоскости \mathbf{E}^2 и в пространстве \mathbf{E}^3 зафиксированы ортонормированные реперы, точки будем отождествлять с их координатами. Одномерный замкнутый шар $D^1(r)$ радиусом r с центром 0 на прямой \mathbf{E}^1 – это отрезок $[-r; r]$. Его объем (длина) равен $\text{vol}_1(D^1(r)) = 2r$. Двумерный замкнутый шар $D^2(r)$

радиусом r с центром $(0,0)$ на плоскости \mathbf{E}^2 – это круг, который задается условием $x^2 + y^2 \leq r^2$. Круг $D^2(r)$ есть объединение хорд, параллельных оси Oy . Поэтому его объем (площадь) можно вычислить, «суммируя» длины этих хорд. Хорда, удаленная от начала координат на расстояние x , представляет собой отрезок длины $2\sqrt{r^2 - x^2}$, т. е. одномерный шар $D^1(\sqrt{r^2 - x^2})$. Следовательно, площадь круга $D^2(r)$ можно вычислить с помощью определенного интеграла:

$$\text{vol}_2(D^2(r)) = 2 \int_0^r \text{vol}_1(D^1(\sqrt{r^2 - x^2})) dx = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi r^2.$$

Аналогично объем трехмерного шара $D^3(r)$ можно вычислить следующим образом:

$$\text{vol}_3(D^3(r)) = 2 \int_0^r \text{vol}_2(D^2(\sqrt{r^2 - x^2})) dx = 2 \int_0^r \pi(r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Эти примеры позволяют считать, что справедлива следующая рекуррентная формула для вычисления объема n -мерного шара в пространстве \mathbf{E}^n :

$$\text{vol}_n(D^n(r)) = 2 \int_0^r \text{vol}_{n-1}(D^{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})) dx.$$

Далее эта формула анализируется методами математического анализа с использованием специальных функций. Опуская технические детали, приведем окончательный результат:

$$\text{vol}_{2k}(D^{2k}(r)) = \frac{\pi^k}{k!} r^{2k}, \quad \text{vol}_{2k+1}(D^{2k+1}(r)) = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!} r^{2k+1}.$$

В последней формуле $(2k+1)!!$ обозначает произведение всех нечетных чисел от 1 до $2k+1$ включительно. Отметим, в частности, что объем четырехмерного шара радиуса r равен $\text{vol}_4(D^4(r)) = \frac{\pi^2}{2} r^4$.

§ 7.4. ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА \mathbf{E}^n . ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ. ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В \mathbf{E}^n

Среди множества всех аффинных преобразований евклидова точечного пространства \mathbf{E}^n выделим те, которые сохраняют расстояние между точками.

Определение 7.4.1. Аффинное преобразование

$$f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n, \quad M \mapsto f(M) = M'$$

называется **движением**, если f сохраняет расстояние между точками, т. е. для любых точек $A, B \in \mathbf{E}^n$ верно равенство

$$d(A', B') = d(A, B). \quad (7.4.1)$$

Утверждение 7.4.1. Аффинное преобразование $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$ является движением тогда и только тогда, когда его однородная часть $\varphi : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ – ортогональный линейный оператор евклидова векторного пространства \mathbf{V}^n .

Доказательство. Условие (7.4.1) означает, что линейный оператор φ сохраняет длины векторов $|\varphi(\vec{a})| = |\vec{a}|$ для любого вектора $\vec{a} \in \mathbf{V}^n$. Если φ – ортогональный линейный оператор, т. е. φ сохраняет скалярное произведение векторов, то φ сохраняет и длины векторов, поскольку длина выражается через скалярное произведение: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. С другой стороны, скалярное произведение можно выразить через длины векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2}.$$

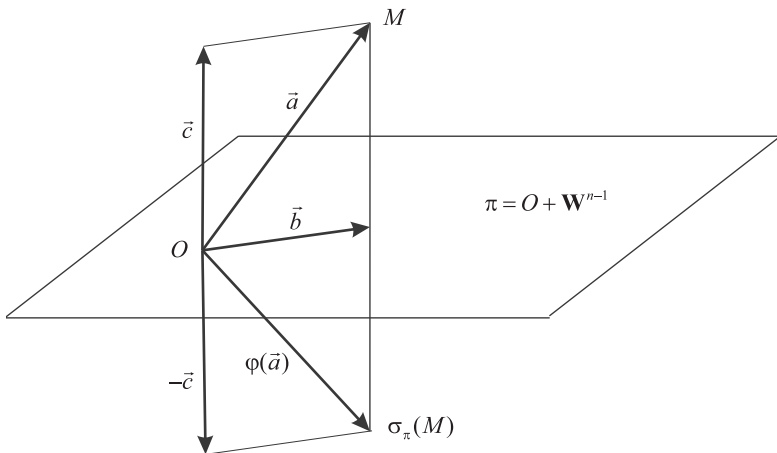
Следовательно, для оператора $\varphi : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ условие сохранения длин векторов эквивалентно условию сохранения скалярного произведения, т. е. условию ортогональности этого оператора. ◀

Следствие 7.4.1. Координатная запись движения $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$ в ортонормированном репере имеет вид

$$(x') = A(x) + (\alpha),$$

где A – ортогональная матрица.

Примеры движений – параллельные переносы $\tau_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in \mathbf{V}^n$, поскольку в координатной записи $\tau_{\vec{a}}$ матрица A единичная. Движениями являются также *симметрии относительно гиперплоскостей*, которые определяются следующим образом. Пусть $\pi = O + \mathbf{W}^{n-1}$ – гиперплоскость в евклидовом пространстве с начальной точкой O и направляющим пространством \mathbf{W}^{n-1} (см. рисунок).



Радиус-вектор \overline{OM} любой точки $M \in \mathbf{E}^n$ единственным образом представляется в виде $\overline{OM} = \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} \in \mathbf{W}^{n-1}$, $\vec{c} \in (\mathbf{W}^{n-1})^\perp$. Определим линейный оператор $\varphi: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ следующим образом: $\varphi(\vec{a}) = \vec{b} - \vec{c}$. Оператор φ – ортогональный, поскольку

$$|\varphi(\vec{a})| = \sqrt{(\vec{b} - \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{b}^2 + \vec{c}^2} = |\vec{a}|.$$

Зададим аффинное преобразование $\sigma_\pi: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$ с однородной частью φ . Для этого достаточно задать образ одной точки (см. теорему 6.5.1). Положим $\sigma_\pi(O) = O$. Преобразование σ_π называется *симметрией относительно гиперплоскости* π . Не являются движениями гомотетии с коэффициентом гомотетии, отличным от 1.

Обозначим $G(\mathbf{E}^n)$ множество всех движений пространства \mathbf{E}^n . Очевидно, что это множество с операцией композиции отображений образует группу, которая является подгруппой группы $\text{Aut}(\mathbf{E}^n)$ всех аффинных преобразований пространства \mathbf{E}^n . Некоторые свойства фигур в евклидовом пространстве \mathbf{E}^n сохраняются при всех движениях. Это, разумеется, свойства, которые сохраняются при всех аффинных преобразованиях, т. е. свойства, составляющие аффинную геометрию. Помимо них сохраняются расстояния между соответствующими точками, величины соответствующих друг другу углов и все другие свойства, которые можно определить, используя понятие расстояния. Совокупность свойств, сохраняющихся при всех движениях, составляет *геометрию группы движений* $G(\mathbf{E}^n)$ или *евклидову геометрию* пространства \mathbf{E}^n . Поскольку группа движений $G(\mathbf{E}^n)$ уже группы $\text{Aut}(\mathbf{E}^n)$ аффинных преобразований, то евклидова геометрия шире, богаче аффинной геометрии.

Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры в пространстве \mathbf{E}^n . Будем говорить, что фигура Φ_1 *конгруэнтна* (*евклидово эквивалентна*) фигуре Φ_2 , если существует движение $f \in G(\mathbf{E}^n)$, переводящее Φ_1 в Φ_2 , т. е. такое, что $f(\Phi_1) = \Phi_2$. Легко проверить, что отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности в смысле теории множеств (см. [9]), и, следовательно, множество всех фигур пространства \mathbf{E}^n разбивается на классы конгруэнтных (евклидово эквивалентных) фигур. *Евклидовой классификацией* некоторой совокупности фигур в аффинном пространстве называется разбиение этой совокупности на классы евклидово эквивалентных фигур. Поскольку группа движений $G(\mathbf{E}^n)$ уже группы $\text{Aut}(\mathbf{E}^n)$ аффинных преобразований, то две аффинно эквивалентные фигуры могут быть неконгруэнтными. Поэтому любой класс аффинно эквивалентных фигур разбивается на классы евклидово эквивалентных. Например, в § 6.6 отмечалось, что любой треугольник в пространстве \mathbf{E}^3 можно перевести в любой другой аффинным преобразованием, т. е. все треугольники составляют один аффинный класс. Однако если один треугольник переводится в другой движением, то длины соответствующих друг другу сторон должны быть равны. Поэтому евклидово эквивалентными могут быть только такие треугольники, стороны которых соответственно равны. Следовательно, класс евклидово эквивалентных треугольников составляют такие треугольники, что для любых двух из них можно установить взаимно однозначное соответствие между сторонами, при котором соответствующие стороны будут равны. Отметим,

что в школьном курсе геометрии конгруэнтные фигуры называются просто равными. Поэтому три известных признака равенства треугольников являются необходимыми и достаточными условиями принадлежности треугольников одному евклидову классу эквивалентности. Отметим, что для некоторых фигур, например, для плоскостей, аффинная классификация совпадает с евклидовой. Докажем соответствующее утверждение (сравните с теоремой 6.6.4).

Утверждение 7.4.2. *Плоскости $\mathcal{B}^k = M_0 + \mathbf{W}^k$ и $\mathcal{P}^m = N_0 + \mathbf{U}^m$ в евклидовом точечном пространстве \mathbf{E}^n евклидово эквивалентны тогда и только тогда, когда $k = m$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}^m = f(\mathcal{B}^k)$ для некоторого движения $f \in G(\mathbf{E}^n)$. Поскольку f – аффинное преобразование, то $k = m$.

Обратно, пусть $k = m$. Пусть $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ и $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ – базисы направляющих пространств \mathbf{W}^k и \mathbf{U}^k данных плоскостей. Дополним их до базисов евклидова векторного пространства \mathbf{V}^n : $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ и $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$. Применив процесс ортогонализации к этим базисам, а затем нормировав найденные векторы, получим ортонормированные базисы $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ и $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n)$ пространства \mathbf{V}^n , такие, что $(\vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_k)$ и $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_k)$ – базисы подпространств \mathbf{W}^k и \mathbf{U}^k . Линейный оператор $\varphi: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$, переводящий соответствующие векторы базисов друг в друга, т. е. такой, что $\varphi(\vec{a}'_i) = \vec{b}'_i, i \in \{1, \dots, n\}$, является, очевидно, ортогональным линейным оператором. По теореме 6.5.1 существует аффинное отображение $f: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$ с однородной частью φ , оставляющее точку N_0 на месте. Согласно утверждению 7.4.1, f – движение. Рассмотрим теперь движение $g = f \circ \tau_{\vec{a}}$, где $\vec{a} = \overline{M_0 N_0}$. Очевидно, что $g(\mathcal{B}^k) = \mathcal{P}^k$. ◀

В точечном евклидовом пространстве \mathbf{E}^n , как и в любом вещественном аффинном пространстве, определяются фигуры второго порядка (см. § 6.9), которые задаются в некотором аффинном репере $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ алгебраическими уравнениями второй степени с n неизвестными:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n a_k x_k + a = 0, \quad a_{ij}, a_k, a \in \mathbf{R}, \quad A = (a_{ij}) \neq 0, \quad A = A^t. \quad (7.4.2)$$

Напомним (см. § 3.5), что в пространстве \mathbf{E}^3 для каждой фигуры второго порядка Φ существует ортонормированный репер, в котором Φ задается каноническим уравнением. Такая же ситуация в евклидовом пространстве любой размерности. Зафиксируем в пространстве \mathbf{E}^n ортонормированный репер $(O, \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n)$. Согласно теореме 6.4.1, любая фигура второго порядка Φ задается в этом репере уравнением (7.4.2). При переходе к другому ортонормированному реперу уравнение фигуры сохраняет вид (7.4.2), при этом матрица A' квадратичной части нового уравнения связана с матрицей A : $A' = S^t A S$. Здесь S – матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому, т. е. ортогональная. В курсе линейной алгебры (см., например, [2, теорема 24.17]) доказывается, что для любой вещественной симметрической матрицы A существует ортогональная матрица S такая, что $A' = S^t A S$ – диагональная матрица. С геометрической точки зрения это означает, что для фигуры второго порядка Φ существует ортонормированный репер, в котором Φ имеет уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + 2a_1 x_1 + \dots + 2a_n x_n + a = 0, \quad (7.4.3)$$

причем хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ отлично от нуля. Далее можно добиться дальнейшего упрощения уравнения (7.4.3) с помощью параллельного переноса системы координат (и, если надо, многомерного аналога поворота вокруг прямой). Рассуждения при этом аналогичны тем, которые проводились в § 3.5 для пространства E^3 . Опуская детали, сформулируем окончательный результат.

Теорема 7.4.1. *Для любой фигуры второго порядка Φ в евклидовом точечном пространстве E^n существует ортонормированный репер, в котором Φ имеет одно из уравнений вида*

$$\frac{X_1^2}{p_1} + \dots + \frac{X_r^2}{p_r} = 1, \quad 0 < r \leq n, p_i \in \mathbf{R}; \quad (7.4.4)$$

$$\frac{X_1^2}{p_1} + \dots + \frac{X_r^2}{p_r} = 0, \quad 0 < r \leq n, p_i \in \mathbf{R}; \quad (7.4.5)$$

$$\frac{X_1^2}{p_1} + \dots + \frac{X_r^2}{p_r} = 2X_{r+1}, \quad 0 < r \leq n-1, p_i \in \mathbf{R}. \quad (7.4.6)$$

Уравнения (7.4.4)–(7.4.6) называются **каноническими уравнениями** фигур второго порядка.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Милованов М. В.* Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. : учеб. пособие. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 1. – 302 с.
2. Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. : учеб. пособие / М. В. Милованов [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1987. – Ч. 2. – 269 с.
3. *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия : учебник. – М. : МГУ, 1969. – 700 с.
4. *Постников М. М.* Аналитическая геометрия. – М. : Наука, 1973. – 752 с.
5. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия : учеб. пособие. – М. : Наука, 1979. – 336 с.
6. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник. – М. : Наука, 1979. – 512 с.
7. *Гильберт Д.* Основания геометрии : пер. с нем. – М.; Л. : ОГИЗ, 1948. – 492 с.
8. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия : учеб. пособие. – 7-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 584 с.
9. *Кононов С. Г.* Введение в математику : учеб. пособие : в 3 ч. / С. Г. Кононов, Р. И. Тышкевич, В. И. Янчевский. – Минск : БГУ, 2003. – Ч. 1. – 171 с.
10. *Кононов С. Г.* Введение в математику : учеб. пособие : в 3 ч. / С. Г. Кононов, Р. И. Тышкевич, В. И. Янчевский. – Минск : БГУ, 2003. – Ч. 2. – 126 с.
11. *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия : пер. с франц. – М. : Наука, 1972. – 336 с.
12. *Болтянский В. Г.* Векторное изложение геометрии : пособие для учителей / В. Г. Болтянский, М. Б. Волович, А. Д. Семушин. – М. : Просвещение, 1982. – 143 с.
13. Основы аффинной геометрии : учеб. пособие / С. Г. Кононов [и др.]. – Минск : БГУ, 2009. – 375 с.
14. *Берже М.* Геометрия : в 2 т. : пер. с франц. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 560 с.; Т. 2. – 368 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Автоморфизм аффинного пространства, 183
Асимптотическое направление, 204
Аффинная группа, 187
– геометрия, 188
– классификация, 187
– оболочка множества точек, 167
– эквивалентность фигур, 187
– прямая, 163
– точка, 163
Аффинное отображение, 180
– – центроаффинное, 185
– преобразование, 139, 147, 183
– пространство, 163
– – арифметическое, 164
Аффинно независимые точки, 168
Аффинный репер, 52, 53, 170

Б

База цилиндрической фигуры, 104, 200
Базис, 28, 30, 31
– левый, 36
– ортогональный, 211
– ортонормированный, 33, 212
– правый, 36
Базисы одинаково ориентированные, 34
– противоположно ориентированные, 34
Барицентр, 190
Барицентрическая линейная комбинация точек, 189

В

Величина угла между векторами, 14
– – – прямыми, 69
Вектор, 14
– нулевой, 14
– противоположный, 17
Векторизация, 164
Вектор-мостик, 167
Векторное произведение векторов, 40
Векторно-параметрическое задание прямой, 62
– – – фигуры, 59
– – уравнение прямой, 63
Векторы ортогональные (перпендикулярные), 14, 211
– коллинеарные, 15
– компланарные, 15
– линейно независимые, 27
– линейно независимые, 28
Вершина гиперболы, 85
– двуполостного гиперболоида, 102
– конической фигуры, 106
– параллелепипеда, 193
– симплекса, 193
– эллипса, 80
– эллиптического параболоида, 103
Винтовое движение, 161
Выпуклая оболочка точек, 196
– линейная комбинация точек, 196
– фигура, 195

Г

Геометрия аффинной группы, 188
– группы движений, 228

Гипербола, 84
– сопряженная, 87
Гиперболоид, 200
– двуполостный, 104
– – вращения, 102
– однополостный, 104
– – вращения, 102
Гиперплоскость, 166
Гомотетия, 88, 150
Грань k -мерная параллелепипеда, 193
– – симплекса, 194

Д

Движение, 154, 157, 227
Детерминант (определитель) матрицы, 25
Диагональ параллелепипеда, 193
Директриса гиперболы, 94
– параболы, 94
– эллипса, 94

Е

Евклидова классификация, 228
– геометрия, 228
Евклидово векторное пространство, 209
– точечное пространство, 214

З

Задание фигуры векторно-параметрическое, 59
– – координатно-параметрическое, 59

И

Изоморфизм аффинных пространств, 183

К

Канонические уравнения фигур второго порядка, 94, 118, 230
Карта сечений, 108
Конус второго порядка, 104, 200
– – – круговой, 101

– – – мнимый, 114, 200
Координатная ось, 52
– плоскость, 54
Координатное задание аффинного преобразования, 148
– – линейного оператора, 152
Координаты вектора, 29, 30, 31
– однородные проективной точки, 129
– точки, 52, 53, 170
– – барицентрические, 191
– – полярные, 59
– – сферические, 60
– – цилиндрические, 61
Критерий коллинеарности векторов, 43
– компланарности векторов, 47, 49
– ортогональности векторов, 38
Куб n -мерный, 222

Л

Линейная комбинация векторов, 27
– – – нетривиальная, 27
– – – тривиальная, 27
Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием, 145
– – ортогональный, 156, 214
Локальная евклидова карта проективной плоскости, 129

М

Масштабирование, 149
Матрица, 23
– Грама, 214
– единичная, 23
– квадратная, 23
– линейного оператора, 148
– невырожденная, 26
– нулевая, 23
– обратная, 26
– ортогональная, 112, 212
– перехода, 48, 172
– скалярного произведения, 39
– транспонированная, 23
Меридиан фигуры вращения, 100
Метод координат, 57
– сечений, 108

Мнимая точка вещественного
аффинного пространства, 201
Модель проективной плоскости
арифметическая, 133
— — — вторая, 129
— — — первая, 126

Н

Направленный отрезок, 11
— — нулевой, 12
— — противоположный, 12
Направляющие косинусы, 40
Направляющее пространство плоско-
сти, аффинного подпространства, 165
Направляющий вектор прямой, 62
Начальная точка, 62, 165
Нормальное уравнение фигуры второ-
го порядка, 134, 199
Нормальный вектор плоскости, 73
— — прямой, 66

О

Образующая цилиндрической фигуры,
104
Объем n -мерный, 223, 225
Овальная линия, 134
— — мнимая, 134
Однородная часть аффинного отобра-
жения, 180
Определитель (детерминант) матрицы,
25
Ортогональная проекция вектора, 213
Ортогональные подпространства, 213
Ортогональное дополнение подпро-
странства евклидова векторного про-
странства, 213
Ориентация плоскости, 35
— пространства, 36
— прямой, 34
Основной прямоугольник гиперболы, 85
— — эллипса, 80
Ось абсцисс, 53
— аппликата, 54
— ординат, 53
Отрезок, 188

П

Параболоид гиперболический, 108, 200
— эллиптический, 104, 200
— — вращения, 102
Параллелепипед n -мерный, 193
— — прямоугольный, 222
Параллель фигуры вращения, 101
Параллельный перенос, 149, 157, 160,
181
Параметризация фигуры, 58
Плоскости в аффинном пространстве
параллельные, 169
— — — скрещивающиеся, 170
— — — частично параллельные, 170
Плоскости ортогональные, 216
Плоскость в аффинном пространстве,
166
— проективная, 126
— k -мерная, 166
— координатная, 171
Поворотная симметрия, 151, 160
Поворот плоскости вокруг точки, 157
Подпространство (плоскость)
аффинного пространства, 165
— пространства вокруг прямой, 160
Полуось гиперболы, 85
— эллипса, 80
Полупрямое произведение подгрупп,
185
Полярная система координат, 59
Правило замыкающей, 18
— параллелограмма, 17
— параллелепипеда, 18
Проективная плоскость, 126
— прямая, 126
— точка, 126
Проекция точки, 20, 22
— вектора, 21
— направленного отрезка, 21
— фигуры, 21
Произведение вектора на число, 19
— матриц, 25
— матрицы на число, 24
Простое отношение точек, 146
Процесс ортогонализации, 211
Прямолинейные образующие, 120, 124
Прямая пополненная, 128

Р

Равенство треугольника, 17
 Радиус-вектор точки, 52, 53, 164
 Размерность аффинного пространства, 163
 Расстояние в евклидовом точечном пространстве, 215
 Репер аффинный, 52, 53
 – ортогональный, 222
 – ортонормированный, 215

С

Связка прямых, 126
 Сдвиг, 151
 Середина отрезка, 188, 192, 201
 Сечение круговое, 119
 Симплекс, 193
 Симметрия относительно гиперплоскости, 227
 – – прямой, 150
 – – точки, 150
 Система координат аффинная (декартова), 54
 – – декартова прямоугольная, 54
 – – полярная, 59
 – – сферическая, 60
 – – цилиндрическая, 61
 Сжатие плоскости, 83
 – пространства, 103
 Скалярное произведение векторов, 36, 209
 Скользящая симметрия, 157, 160
 Смешанное произведение векторов, 45
 Соотношение Шаля, 163
 Сумма векторов, 17
 – матриц, 24
 Сфера, 215

Т

Тождество Якоби, 45
 Точка бесконечно удаленная (несобственная), 128

У

Угловой коэффициент прямой, 64
 Угол между плоскостями, 219

Уравнение векторно-параметрическое плоскости, 71
 – – – прямой, 63, 64, 76
 – каноническое прямой, 64, 77
 – – фигуры второго порядка, 94, 118, 230
 – – гиперболы, 84
 – – параболы, 88
 – – эллипса, 79
 – нормальное фигуры второго порядка на проективной плоскости, 134
 – плоскости в отрезках, 73
 – – общее, 72
 – прямой в отрезках, 66
 – – общее, 65
 – – по точке и нормальному вектору, 66
 – – по точке и угловому коэффициенту, 64
 – фигуры, 57, 174
 Уравнения плоскости параметрические, 71, 177
 – прямой параметрические, 63, 64, 177
 – – общие, 77, 178, 179
 Умножение матриц, 25

Ф

Фигура, 11
 – вращения, 100
 – второго порядка в аффинном пространстве, 197
 – – – на плоскости, 88
 – – – на проективной плоскости, 133
 – – – в пространстве, 107
 – коническая, 106
 – цилиндрическая, 104, 200
 Фигуры конгруэнтные, 228
 Фокальный параметр, 88, 96
 – радиус, 81, 85, 88
 Фокус гиперболы, 85
 – параболы, 88
 – эллипса, 81
 Формулы преобразования координат векторов, 49
 – – – точек, 56, 173

Х

Характеристика пары плоскостей, 169

Ц

Центр симплекса, 194
– тяжести, 190
– фигуры, 189
– – обобщенный, 202
Цилиндр круговой, 101
– гиперболический, 105
– параболический, 106
– эллиптический, 105
– – мнимый, 115

Ш

Шар замкнутый, 215
– открытый, 215

Э

Эквивалентные направленные отрезки, 12
Эксцентриситет гиперболы, 85
– параболы, 88
– эллипса, 80
Эллипс, 79
– мнимый, 91
Эллипсоид, 104, 200
– вращения, 101
– мнимый, 113, 200
– трехосный, 104

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9

Глава 1. ВЕКТОРЫ

§ 1.1. Понятие вектора	11
§ 1.2. Сложение векторов. Умножение векторов на числа	16
§ 1.3. Проекции	20
§ 1.4. Необходимые сведения о матрицах и определителях	23
§ 1.5. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базисы ..	27
§ 1.6. Скалярное произведение векторов	36
§ 1.7. Векторное произведение векторов	40
§ 1.8. Смешанное произведение векторов	45
§ 1.9. Формулы преобразования координат векторов	48

Глава 2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

§ 2.1. Аффинные реперы и координаты точек. Формулы преобразования координат точек	52
§ 2.2. Фигуры и их уравнения	57
§ 2.3. Прямые на плоскости	62
§ 2.4. Плоскости и прямые в пространстве	70

Глава 3. ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 3.1. Эллипс, гипербола, парабола	79
§ 3.2. Фигуры второго порядка на плоскости	88
§ 3.3. Некоторые общие свойства эллипса, гиперболы и параболы	94
§ 3.4. Фигуры вращения. Цилиндрические и конические фигуры	99
§ 3.5. Фигуры второго порядка в пространстве	107
§ 3.6. Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида и гиперболического параболоида	119

Глава 4. ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

§ 4.1. Две модели проективной плоскости	126
§ 4.2. Однородные координаты на проективной плоскости. Арифметическая модель проективной плоскости	129
§ 4.3. Фигуры второго порядка на проективной плоскости	133

Глава 5. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ

§ 5.1. Аффинные преобразования плоскости E^2 и пространства E^3	138
§ 5.2. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием	142
§ 5.3. Координатное выражение аффинного преобразования	147
§ 5.4. Движения плоскости E^2 и пространства E^3	154

Глава 6. АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 6.1. Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства	162
§ 6.2. Подпространства (плоскости) в аффинном пространстве	165
§ 6.3. Системы координат в аффинном пространстве A^n . Формулы преобразования координат	170
§ 6.4. Уравнения плоскостей в аффинном пространстве A^n	174
§ 6.5. Аффинные отображения	180
§ 6.6. Изоморфизмы и автоморфизмы аффинных пространств	183
§ 6.7. Барицентрические линейные комбинации точек и барицентрические координаты	189
§ 6.8. Параллелепипеды и симплексы в вещественных аффинных пространствах. Выпуклые фигуры	192
§ 6.9. Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах	197

Глава 7. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 7.1. Евклидовы векторные пространства	209
§ 7.2. Евклидовы точечные пространства	214
§ 7.3. Объемы некоторых фигур в пространстве E^n	222
§ 7.4. Движения пространства E^n . Евклидова геометрия. Фигуры второго порядка в E^n	226

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ	231
---------------------------------------	------------

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	232
-----------------------------------	------------

Учебное издание

Классическое университетское издание

Кононов Сергей Гаврилович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор *Н. Ф. Акулич*

Художник обложки *Т. Ю. Таран*

Технический редактор *Т. К. Раманович*

Компьютерная верстка *А. А. Микулевича*

Корректоры *М. А. Харчевник, Т. А. Беланко*

Подписано в печать 19.12.2014. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,36. Уч.-изд. л. 18,32. Тираж 150 экз. Заказ 845.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.

Кононов, С. Г.
К64 Аналитическая геометрия : учеб. пособие / С. Г. Кононов. – Минск : БГУ. –
238 с. : ил.
ISBN 978-985-566-104-8.

Рассматриваются векторы, фигуры первого и второго порядков на евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве, а также вопросы многомерной аналитической геометрии.

Предназначено для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по математическим специальностям.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73-1